Methoden der Taylor-Entwicklung

Einige Methoden der Taylor-Entwicklung sind:

- direkte Berechnung der Ableitungen im Entwicklungspunkt
- gliedweise Differentiation oder Integration
- Koeffizientenvergleich
- Produktbildung durch gliedweise Multiplikation
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument

Beispiel:

Taylor-Reihe um $z = 0$ der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + pz + q}$$

Ansatz

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + pz + q} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Koeffizientenvergleich $\quad \rightsquigarrow$

$$1 = c_0 q + (c_1 q + c_0 p) z + (c_2 q + c_1 p + c_0) z^2 + (c_3 q + c_2 p + c_1) z^3 + \cdots$$

sukzessive Berechnung der Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{q} \\
c_1 &= -\frac{p}{q^2} \\
c_2 &= -\frac{c_0 + c_1 p}{q} = -\frac{1}{q^2} + \frac{p^2}{q^3} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

allgemein:

$$
(c_n q + c_{n-1} p + c_{n-2}) z^n = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_n = -\frac{c_{n-2} + c_{n-1} p}{q}
$$

Beispiel:

Taylor-Entwicklung im Punkte $z = 0$ der Funktion

$$f(z) = \operatorname{Ln} \frac{a+z}{a-z}$$

Ableitung

$$f'(z) = \frac{a-z}{a+z} \frac{d}{dz} \frac{a+z}{a-z} = \frac{2}{a} \frac{1}{1-(z/a)^2} \underset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{2n}$$

gliedweise Integration $\quad \rightsquigarrow$

$$f(z) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1/2} \left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1}$$

Integrationskonstante: $f(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = 0$