Methoden der Laurent-Entwicklung

Einige Methoden der Laurent-Entwicklung sind:

- direkte Berechnung der Koeffizienten
- gliedweise Differentiation oder Integration bekannter Reihen
- Koeffizientenvergleich
- Summe oder Produkte bekannter Reihen
- Substitution $z \to \frac{1}{z-a}$ in bekannten Taylor-Reihen
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument

Beispiel:

Laurent-Entwicklung der Arcustangens-Funktion durch gliedweise Integration der Reihendarstellung der Ableitung

$$\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$$

- $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n$$

$\rightsquigarrow$ Taylor-Entwicklung

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots$$

$(\arctan(0) = 0)$

- $|z| > 1$:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+1/z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^{-n}$$

$\rightsquigarrow$ Laurent-Entwicklung

$$\arctan z = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{-2n-1} = \frac{pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} - \cdots$$

(Integrationskonstante $\pi/2$ durch Vergleich der Werte bei $z = \infty$)

Beispiel:

geometrische Reihen

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1$$

Differenzieren $\rightsquigarrow$ Taylor- bzw. Laurent-Reihen

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{z^{n+2}} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \cdots, \quad |z| > 1$$

weiteres Differenzieren $\rightsquigarrow$ Reihen von $(1-z)^{-m}$