Maximumprinzip

Für eine in einem Gebiet D analytische, nicht konstante Funktion f besitzt $|f|$ kein Maximum in D.
Ist f auf $\overline{D} = D \cup C$ stetig, wobei $C = \partial D$ der Rand von D ist, so gilt deshalb

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in C} |f(z)| \, ,$$

d.h. das Maximum des Betrages wird auf dem Rand angenommen.

Beweis:

(i) zeige: f ist konstant $= f(z)$ auf jedem Kreis

$$C:\ t \mapsto w = z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

in D um eine Maximalstelle z von $|f|$

Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ o.B.d.A. $f(z)$ reell und positiv

(Behauptung trivial, falls $|f(z)| = 0$)

$\implies \quad \operatorname{Re} f(w) \le |f(w)| \le f(z)$

Annahme: $f(w) \neq f(z)$ für ein $w = z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in C$

$\implies$

$$\operatorname{Re} f(w) < f(z) = \operatorname{Re} f(z)$$

Mittelwerteigenschaft $\quad\rightsquigarrow\quad$ Widerspruch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, dt < f(z)\,,$$

da die Ungleichung $\operatorname{Re} f(w) < f(z)$ in einer Umgebung von w gültig bleibt

(ii) verbinde einen beliebigen Punkt in $w \in D$ durch eine Kurve Γ mit z und überdecke Γ mit Kreisscheiben

$$\implies \quad f \text{ konstant entlang von } \Gamma$$

$$\implies f(w) = f(z)$$

Beispiel:

illustriere das Maximumprinzip für

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$

auf dem Rechteck

$$D:\ x = \mathrm{Re}\ z \in (-\pi, \pi), \quad y = \mathrm{Im}\ z \in (-1, 1)$$

berechne den Betrag

$$\begin{aligned} |\cos(z)|^2 &= \cos(z)\overline{\cos(z)} = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}) \\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-2y} + 2\cos(2x) + \mathrm{e}^{2y}) \end{aligned}$$

Maximum an den Ecken des Randes: $x \in \{-\pi, \pi\}$, $y \in \{-1, 1\}$