Laurent-Reihe

Eine in einem Kreisring $D: \ r_1 < |z-a| < r_2$ analytische Funktion f kann in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

entwickelt werden, die in D absolut konvergiert.

Die Koeffizienten besitzen die Integraldarstellung

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw\,,$$

wobei $C \subset D$ ein beliebiger entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a ist.

Die Laurent-Reihe entspricht einer Zerlegung

$$f(z) = f_1(z-a) + f_2(1/(z-a))$$

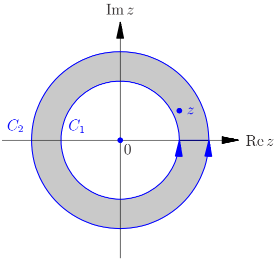
von f in zwei analytische Funktionen f_k, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind.
Die Konvergenzgebiete von f_1 und f_2 sind

$$D_1 : |z-a| < r_2, \quad D_2 : |z-a| > r_1$$

und man erhält $D = D_1 \cap D_2$ als Konvergenzgebiet der Laurent-Reihe.

Beweis:

o.B.d.A. $a = 0$
D: Kreisring mit Rand $C_2 - C_1$, der z einschließt



Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right)$$

- Erstes Integral: $|z| < |w|$ für $w \in C_2$ $\rightsquigarrow$ Entwicklung

$$\frac{1}{w}\,\frac{1}{1-z/w} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \cdots$$

- Zweites Integral: $|z| > |w|$ für $w \in C_1$ $\rightsquigarrow$ Entwicklung

$$-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-w/z} = -\frac{1}{z} - \frac{w}{z^2} - \frac{w^2}{z^3} - \cdots$$

Einsetzen $\rightsquigarrow$ Formel für die Laurent-Koeffizienten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw\, z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw\, z^n \right)$$

($f(w)/w^{n+1}$ in D analytisch $\rightsquigarrow$ Verschiebung des Integrationswegs möglich)

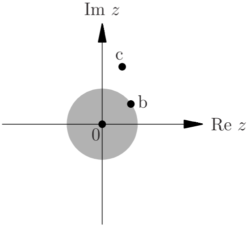
eindeutige Aufspaltung in zwei analytische Funktionen f_k aufgrund der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung

Beispiel:

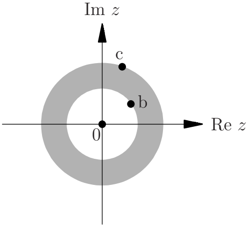
verschiedene Laurent-Entwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{b-c}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c}$$

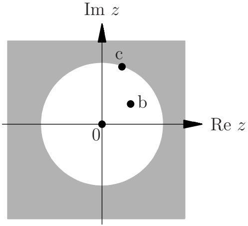
mit $|b| < |c|$ um $a = 0$



$|z| < |b|$



$|b| < |z| < |c|$



$|c| < |z|$

(i) $|z| < |b|$:

$$f(z) = -\frac{1}{b}\frac{1}{1-z/b} + \frac{1}{c}\frac{1}{1-z/c} \underset{\text{geom. Reihe}}{=} -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{c^{n+1}}$$

Konvergenz der Reihen für $|z| < |b|$ bzw. $|z| < |c|$
$\rightsquigarrow$ Taylor-Reihe in der Kreisscheibe $D : |z| < \min(|b|, |c|)$

$$f(z) = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z + \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3}\right) z^2 + \cdots$$

(ii) $|b| < |z| < |c|$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-b/z} + \frac{1}{c}\frac{1}{1-z/c} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{c^{n+1}}$$

Konvergenz der Reihen für $|b| < |z|$ bzw. $|z| < |c|$

$\rightsquigarrow$ Laurent-Reihe in dem Kreisring $|b| < |z| < |c|$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{b^2}{z^3} + \cdots + \frac{1}{c} + \frac{z}{c^2} + \frac{z^2}{c^3} + \cdots$$

(iii) $|c| < |z|$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-b/z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-c/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{z^{n+1}}$$

Konvergenz der Reihen für $|b| < |z|$ bzw. $|c| < |z|$

$\rightsquigarrow$ Laurent-Reihe in dem Kreisring $|z| > \max(|b|, |c|)$

$$f(z) = \frac{b-c}{z^2} + \frac{b^2-c^2}{z^3} + \frac{b^3-c^3}{z^4} + \cdots$$

Beispiel:

Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Konvergenz für $|z| = 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ äquivalente Fourier-Reihe

$$g(t) = f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

- Berechnung der Koeffizienten als Kurvenintegral:

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

C: positiv orientierter Einheitskreis

- Berechnung als trigonometrisches Integral:

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}} \, \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, dt$$

$(z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,,\ dz = \mathrm{i}z\, dt)$