Konforme Abbildung

Eine auf dem Definitionsgebiet D injektive komplex differenzierbare Funktion $z \mapsto w = f(z)$ bezeichnet man als konforme Abbildung. Konforme Abbildungen sind isotrop und winkeltreu. Bezeichnet

$$t \mapsto w(t) = f(z(t))$$

das Bild einer Kurve unter einer komplex differenzierbaren Abbildung f, dann gilt für das Bild der Tangente in einem Punkt $z_0 = z(t_0)$

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)\,.$$

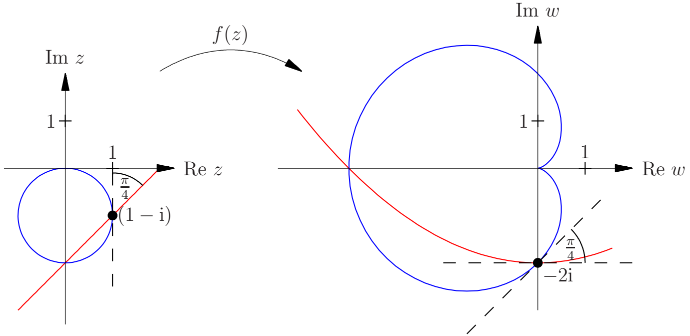
Unabhängig von der Wahl der Kurve z wird die Tangente in z_0 um den Faktor $|f'(z_0)|$ gestreckt und um den Winkel $\arg(f'(z_0))$ gedreht. Insbesondere bleibt der Schnittwinkel zweier Kurven unter der Abbildung f erhalten. Konforme Abbildungen können damit zur Transformation orthogonaler Gitter verwendet werden.

Beispiel:

Gerade C_1: $z_1(t) = -2\mathrm{i} + t(1 + \mathrm{i})$
Kreis C_2: $z_2(t) = 2/(t + \mathrm{i})$

Abbildung

$$f(z) = z^2, \quad f'(z) = 2z$$



Schnittpunkt $z_0 = 1 - \mathrm{i}$ (Parameter $t_0 = 1$ für beide Kurven)
Tangentenvektoren im Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} z_1'(1) &= 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \\ z_2'(1) &= -\frac{2}{(t+\mathrm{i})^2}\bigg|_{t=1} = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \end{aligned}$$

Schnittwinkel: $\pi/4$

Schnittpunkt der Bildkurven $f(C_1)$ und $f(C_2)$: $w_0 = z_0^2 = (1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$
Tangentenvektoren

$$\begin{aligned} f'(1-\mathrm{i})z_1'(1) &= 2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 4 \\ f'(1-\mathrm{i})z_2'(1) &= 2(1-\mathrm{i})\mathrm{i} = 2(\mathrm{i}+1) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ gleicher Schnittwinkel $\pi/4$ der Bildkurven

Streckungsfaktor: $|f'(1-\mathrm{i})| = |2(1-\mathrm{i})| = 2\sqrt{2}$

Beispiel:

konforme Abbildung

$$f\,:\; z \mapsto w = z^2$$

reelle Darstellung mit $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

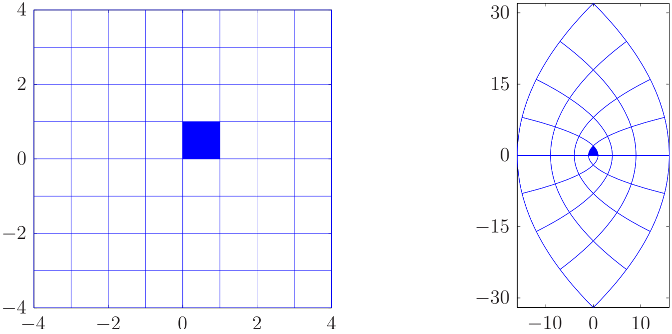
Winkeltreue $\implies$ f und f^{-1} erhalten die Orthogonalität von Koordinatengittern

(i) Gitter $x = \text{const}$, $y = \text{const}$:

$\rightsquigarrow$ zwei Scharen orthogonaler Parabeln

$$u + \left(\frac{v}{2x}\right)^2 - x^2 = 0, \quad u - \left(\frac{v}{2y}\right)^2 + y^2 = 0$$

(jeweils x bzw. y als Parameter; Herleitung der impliziten Darstellung durch Elimination von y bzw. x aus der Gleichung für v)

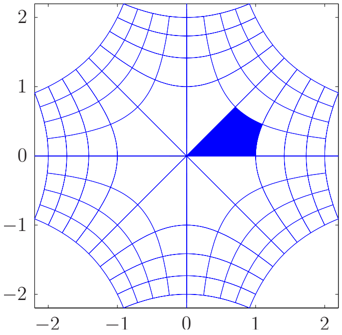


xy-Ebene uv-Ebene

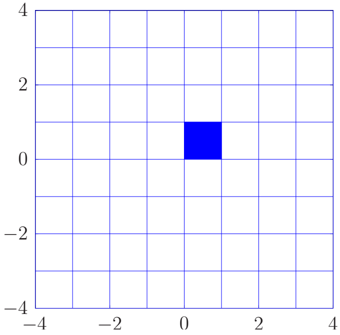
(ii) Gitter $u = \text{const}$, $v = \text{const}$:
Umkehrabbildung $z = \sqrt{w} \rightsquigarrow$ zwei Scharen orthogonaler Hyperbeln

$$x^2 - y^2 = u, \quad 2xy = v$$

(u, v Parameter)



xy-Ebene



uv-Ebene