Komplexes Kurvenintegral

Für einen stetig differenzierbaren Weg

$$C: \; t \mapsto z(t), \quad t \in [a, b]\,,$$

in der komplexen Ebene bezeichnet man

$$\int_C f \, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) \, dt$$

als komplexes Kurvenintegral.
Die Definition ist bei gleichbleibender Orientierung unabhängig von der gewählten Parametrisierung des Weges C.
Bei Umkehrung der Durchlaufrichtung ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Beweis:

Umparametrisierung $t \mapsto s$ mit $ds/dt > 0$:

$$z(t),\ t \in [a,b] \quad \leftrightarrow \quad \tilde{z}(s),\ s \in [c,d]$$

$\leadsto$ Variablensubstitution im Kurvenintegral

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b f(\tilde{z}(s(t)))\frac{d}{dt}\tilde{z}(s(t))\,dt \\
&= \int_a^b f(\tilde{z}(s(t)))\tilde{z}'(s(t))s'(t)\,dt = \int_c^d f(\tilde{z}(s))\tilde{z}'(s)\,ds \\
&= \int_C f(\tilde{z})\,d\tilde{z}
\end{aligned}$$

keine Veränderung bei orientierungserhaltenden Umparametrisierungen
Vorzeichenänderung bei Vertauschung der Grenzen (Umkehrung des Durchlaufsinns)

Beispiel:

integriere $f(z) = z$ über die geradlinige Verbindung

$$C : z(t) = (1-t)p + tq, \quad t \in [0,1]\,,$$

zweier Punkte p und q

$$\begin{aligned}
\int\limits_C f\,dz &= \int\limits_0^1 (p + t(q-p))\underbrace{(q-p)}_{z'(t)}\,dt \\
&= \int\limits_0^1 p(q-p) + t(q-p)^2\,dt \\
&= pq - p^2 + (q-p)^2/2 = q^2/2 - p^2/2
\end{aligned}$$

Beispiel:

Kurvenintegral über den Kreis

$$C: \; z(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$z'(t) = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i}z$, $dz = \mathrm{i}z\,dt$

- $f(z) = 1/z$:

$$\int\limits_C f\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,dt = \mathrm{i}\int\limits_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi\mathrm{i}$$

- $f(z) = z^n$, $n \neq -1$:

$$\begin{aligned} \int\limits_C f\,dz &= \int\limits_0^{2\pi} \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^n \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,dt = \mathrm{i}r^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,dt \\ &= \mathrm{i}r^{n+1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(n+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals

Das komplexe Kurvenintegral ist linear bezüglich des Integranden, d.h.

$$\int\limits_C f + g\, dz = \int\limits_C f\, dz + \int\limits_C g\, dz\,.$$

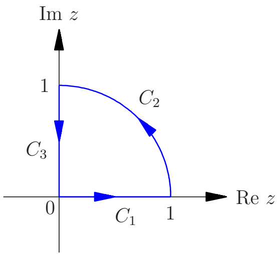
Darüber hinaus ist $\int \ldots\, dz$ additiv bezüglich des Integrationsweges. Setzt sich ein (orientierter) Weg C aus zwei Wegen C_1 und C_2 zusammen, $C = C_1 + C_2$, so gilt

$$\int\limits_C f\, dz = \int\limits_{C_1} f\, dz + \int\limits_{C_2} f\, dz\,.$$

Insbesondere ist $\int\limits_C f\, dz = -\int\limits_{-C} f\, dz$, wobei $-C$ den in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg C bezeichnet.

Beispiel:

Kurvenintegral der Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ entlang des skizzierten Weges



Additivität $\rightsquigarrow$

$$\int_C \sqrt{z}\, dz = \int_{C_1} \ldots\, dz + \int_{C_2} \ldots\, dz + \int_{C_3} \ldots\, dz$$

- C_1: $t \mapsto z(t) = t$, $0 \le t \le 1$, $dz = dt$

$$\int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

- C_2: $t \mapsto z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, $dz = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt = \int_0^{\pi/2} \mathrm{i}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t/2}\, dt = \left[\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} - \frac{2}{3}$$

- C_3: $t \mapsto z(t) = \mathrm{i} - t\mathrm{i}$, $0 \le t \le 1$, $dz = -\mathrm{i}\, dt$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{\mathrm{i}(1-t)}\,(-\mathrm{i})\, dt &= \int_0^1 -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\sqrt{1-t}\, dt = \int_0^1 -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\sqrt{1-t}\, d \\ &= \left[\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}\end{aligned}$$

gesamtes Kurvenintegral:

$$\int\limits_C \sqrt{z}\,dz \quad = \quad \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} - \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = 0$$