Komplexer Logarithmus

Die komplexe Logarithmusfunktion $w = \mathrm{Ln}(z)$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $z = \exp(w)$.
Mit Hilfe der Polardarstellung

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad r = |z|, \varphi = \arg(z)\,,$$

gilt somit

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k), \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei $\ln(r)$ der reelle Logarithmus von r ist.

Alternativ erhält man durch Einsetzen von

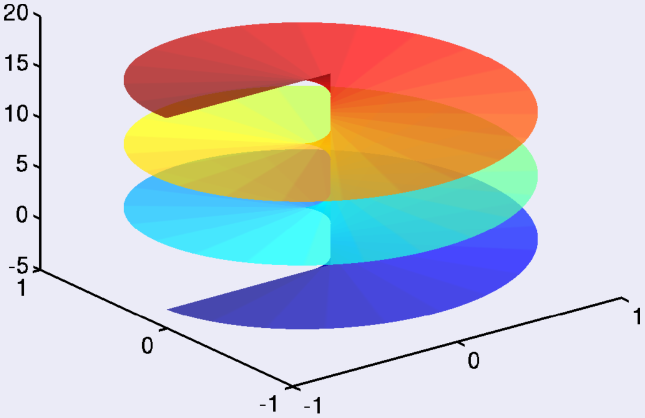
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi$$

eine Darstellung des Logarithmus als Funktion des Realteils x und Imaginärteils y von z. Dabei ist, analog zu Polarkoordinaten, $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$ je nach dem Vorzeichen von x und y zu wählen.

Aufgrund der Periodizität der Exponentialfunktion ist φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Man sagt, Ln besitzt unendlich viele Zweige. Ein Standardbereich (Hauptzweig) ist

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi], \quad k = 0\,.$$

Obwohl Ln so auf der gelochten Ebene $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ eindeutig definiert ist, erhält man keine global stetige Funktion. Beim Überschreiten der negativen reellen Achse ändert sich $\arg(z)$ abrupt um 2π. Eine singularitätenfreie Definition der Logarithmusfunktion ist nur auf Gebieten möglich, die weder 0 noch eine geschlossene Kurve um 0 enthalten.



Die Abbildung zeigt den Imaginärteil der Logarithmusfunktion für die Einheitskreisscheibe. Jede Windung entspricht einem Zweig der Funktion.

Beispiel:

Komplexer Logarithmus

- einer positiven reellen Zahl x:

$$\mathrm{Ln}(x) = \ln(x) + 2\pi \mathrm{i} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- einer negativen reellen Zahl x:

$$\mathrm{Ln}(x) = \ln(-x) + \pi \mathrm{i}\,(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

  $(x = |x|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\,, |x| = -x)$

- von $z = \sqrt{2}\,(1+\mathrm{i})$:

$$\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Ln}\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right) = \ln(2) + \pi \mathrm{i}\,(8k+1)/4, \quad k \in \mathbb{Z}$$