Integral einer komplexen Funktion

Das Integral einer komplexwertigen Funktion

$$f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad t \in [a, b]\,,$$

ist durch

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,dt$$

definiert.
Es ist in der üblichen Weise linear und additiv.
Darüber hinaus gilt

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|\,.$$

Beispiel:

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

(i) Integral über das Intervall $[0, \varphi]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt &= \int_0^{\varphi} \cos t\, dt + \mathrm{i} \int_0^{\varphi} \sin t\, dt \\
&= [\sin t]_0^{\varphi} + \mathrm{i}\, [-\cos t]_0^{\varphi} \\
&= \sin\varphi + \mathrm{i}\,(1 - \cos\varphi)
\end{aligned}$$

alternativ: direkte Verwendung einer komplexen Stammfunktion

$$\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}}\right]_0^{\varphi} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1}{\mathrm{i}}$$

(ii) Illustration der Betragsungleichung:
Integral des Betrages

$$\int_0^{\varphi} |f(t)|\, dt \overset{|f|=1}{=} \varphi$$

Betrag des Integrals

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\varphi} f(t)\, dt \right| &= |\sin\varphi + \mathrm{i}\,(1-\cos\varphi)| = \sqrt{\sin^2\varphi + 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos\varphi} \underset{\text{Add. Thm}}{=} \sqrt{2 - 2(\cos^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi/2))} \\ &= |2\sin(\varphi/2)| \end{aligned}$$

geometrische Definition der Sinusfunktion $\quad\rightsquigarrow\quad |\sin(t)| \le |t|$ und

$$\left| \int f \right| = |2\sin(\varphi/2)| \le \varphi = \int |f|$$