Komplexe Funktion

Eine komplexe Funktion mit Definitionsgebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ ordnet einer komplexen Zahl $z \in D$ eine komplexe Zahl $w = f(z)$ zu:

$$f : \mathbb{C} \supseteq D \to \mathbb{C}\,.$$

Sie kann mit zwei bivariaten reellen Funktionen identifiziert werden:

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \quad z = x + \mathrm{i}y\,,$$

d.h. $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$.

Beispiel:

$$f(z) = z^2$$

$z = x + \mathrm{i}y \quad \rightsquigarrow$

$$f(x + \mathrm{i}y) = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2$$

Real- und Imaginärteil als reelle Funktionen

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

Darstellung in Polarkoordinaten

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$$

Beispiel:

Darstellung der Wurzelfunktion $f(z) = \sqrt{z}$:

$z = r\exp(\mathrm{i}\varphi) = x + \mathrm{i}y$, $w = f(z) = s\exp(\mathrm{i}\psi) = u + \mathrm{i}v \quad \rightsquigarrow$

$$z = w^2 \quad \Longleftrightarrow \quad s = \sqrt{r} \quad \text{und} \quad \psi \in \{\varphi/2, \pi + \varphi/2\}$$

$z \neq 0 \quad \rightsquigarrow$
zwei mögliche Werte für w mit unterschiedlichem Vorzeichen, d.h. $\sqrt{\ldots}$ ist eine mehrdeutige Funktion mit zwei verschiedenen Zweigen

Real- und Imaginärteil von w für $y \neq 0$:

$$\frac{v}{u} = \tan\psi = \tan(\varphi/2) = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{y/r}{1+x/r} = \frac{y}{r+x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

$\Longrightarrow$

$$(u, v) \parallel (x + r,\, y)\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$\sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{r} \qquad \Longrightarrow$

$$(u,v) = \pm \frac{\sqrt{r}}{|(x+r,y)|}\,(x+r,y)$$

Mit

$$\begin{aligned} |(x+r,y)| &= \sqrt{2r^2+2rx} = \sqrt{2}\,\sqrt{r}\,\sqrt{r+x} \\ y/\sqrt{r+x} &= y\sqrt{r-x}/\sqrt{r^2-x^2} = y\,\sqrt{r-x}/|y| \end{aligned}$$

folgt

$$(u,v) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{r+x}\,, \mathrm{sign}(y)\sqrt{r-x}\right)$$

Definiert man $\mathrm{sign}(0) = 1$, so bleibt diese Darstellung auch für $y = 0$ gültig.
Hauptzweig $\quad\rightsquigarrow\quad$ positives Vorzeichen:

$$\arg(\sqrt{z}) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Bei der Definition der Wurzelfunktion ist zu beachten, dass bei einer konsistenten Wahl des Vorzeichens (z.B. für den Hauptzweig) der Grenzwert bei Annäherung an die negative reelle Achse von oben sich von dem Grenzwert bei Annäherung von unten unterscheidet. Das Definitionsgebiet D sollte also keine geschlossene Kurve um den Ursprung enthalten.

Beispielsweise kann der Sektor

$$D:\ -\pi < \arg z < \pi\,, \quad |z| > 0\,,$$

gewählt werden.