Komplexe Differenzierbarkeit

Eine komplexe Funktion f ist im Punkt z komplex differenzierbar, wenn der als Ableitung bezeichnete Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

existiert und unabhängig von der Folge Δz ist.

Ist f in jedem Punkt einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so heißt f komplex differenzierbar oder analytisch in D.

Beispiel:

(i) $f(z) = z^2$:

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z$$

$\Longrightarrow$ f komplex differenzierbar $\forall\ z \in \mathbb{C}$

(ii) $f(z) = 1/z$:

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{1/(z + \Delta z) - 1/z}{\Delta z} = \lim_{|\Delta z| \to 0} -\frac{1}{(z + \Delta z)z} = -\frac{1}{z^2}$$

$\Longrightarrow$ f komplex differenzierbar $\forall\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

Beispiel:

$$f(z) = \operatorname{Re} z$$

(i) $\Delta z = t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\operatorname{Re}(x + t + \mathrm{i}y) - \operatorname{Re}(x + \mathrm{i}y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x + t - x}{t} = 1$$

(ii) $\Delta z = \mathrm{i}t,\ t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\operatorname{Re}(x + \mathrm{i}(t + y)) - \operatorname{Re}(x + \mathrm{i}y)}{\mathrm{i}t} = \lim_{\mathrm{i}t \to 0} \frac{x - x}{\mathrm{i}t} = 0$$

$\Longrightarrow$ f an keinem Punkt $z = x + \mathrm{i}y$ komplex differenzierbar