

# Komplexe Analysis

Das Handout ist Bestandteil der Vortragsfolien zur Höheren Mathematik; siehe die Hinweise auf der Internetseite [vhm.mathematik.uni-stuttgart.de](http://vhm.mathematik.uni-stuttgart.de) für Erläuterungen zur Nutzung und zum Copyright.

# Gebiet

Eine zusammenhängende offene (nicht leere) Teilmenge  $D$  des  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  wird als Gebiet bezeichnet.

Meist werden an den Rand eines Gebietes gewisse minimale Regularitätsanforderungen gestellt. Beispielsweise fordert man für ein Lipschitz-Gebiet  $D$ , dass sich der Rand  $\partial D$  lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellen lässt.

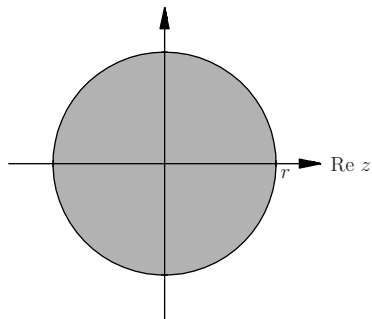
## Beispiel:

einige häufig auftretende Gebiete:

Kreisscheibe

$$D : |z| < r$$

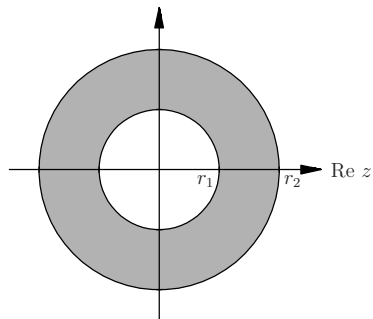
Im  $z$



Kreisring

$$D : r_1 < |z| < r_2$$

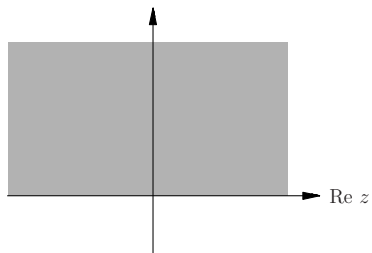
Im  $z$



### Halbebene

$$D : \operatorname{Im} z > 0$$

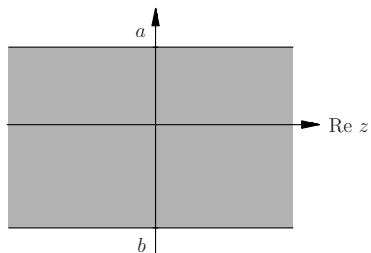
$\operatorname{Im} z$



### Streifen

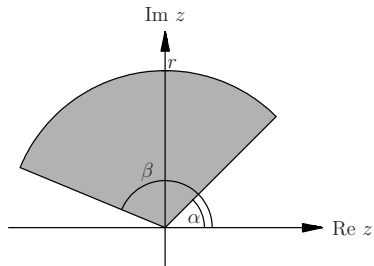
$$D : b < \operatorname{Im} z < a$$

$\operatorname{Im} z$



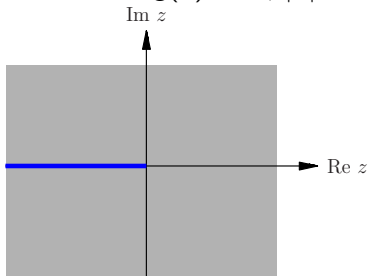
### Sektor

$$D : \alpha < \arg(z) < \beta, 0 < |z| < r$$



### geschlitzte Ebene

$$D : -\pi < \arg(z) < \pi, |z| > 0$$



# Komplexe Funktion

Eine komplexe Funktion mit Definitionsgebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$  ordnet einer komplexen Zahl  $z \in D$  eine komplexe Zahl  $w = f(z)$  zu:

$$f : \mathbb{C} \supseteq D \rightarrow \mathbb{C}.$$

Sie kann mit zwei bivariaten reellen Funktionen identifiziert werden:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

d.h.  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$ .

## Beispiel:

$$f(z) = z^2$$

$$z = x + iy \rightsquigarrow$$

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

Real- und Imaginärteil als reelle Funktionen

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

Darstellung in Polarkoordinaten

$$z = re^{i\varphi} \implies f(z) = r^2 e^{2i\varphi}$$

## Beispiel:

Darstellung der Wurzelfunktion  $f(z) = \sqrt{z}$ :

$$z = r \exp(i\varphi) = x + iy, \quad w = f(z) = s \exp(i\psi) = u + iv \quad \rightsquigarrow$$

$$z = w^2 \quad \iff \quad s = \sqrt{r} \quad \text{und} \quad \psi \in \{\varphi/2, \pi + \varphi/2\}$$

$$z \neq 0 \quad \rightsquigarrow$$

zwei mögliche Werte für  $w$  mit unterschiedlichem Vorzeichen, d.h.  $\sqrt{\dots}$  ist eine mehrdeutige Funktion mit zwei verschiedenen Zweigen

Real- und Imaginärteil von  $w$  für  $y \neq 0$ :

$$\frac{v}{u} = \tan \psi = \tan(\varphi/2) = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{y/r}{1 + x/r} = \frac{y}{r + x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

$\implies$

$$(u, v) \parallel (x + r, y), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{r} \quad \Rightarrow$$

$$(u, v) = \pm \frac{\sqrt{r}}{|(x + r, y)|} (x + r, y)$$

Mit

$$\begin{aligned} |(x + r, y)| &= \sqrt{2r^2 + 2rx} = \sqrt{2} \sqrt{r} \sqrt{r + x} \\ y/\sqrt{r + x} &= y\sqrt{r - x}/\sqrt{r^2 - x^2} = y\sqrt{r - x}/|y| \end{aligned}$$

folgt

$$(u, v) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{r + x}, \operatorname{sign}(y)\sqrt{r - x})$$

Definiert man  $\operatorname{sign}(0) = 1$ , so bleibt diese Darstellung auch für  $y = 0$  gültig.

Hauptzweig  $\rightsquigarrow$  positives Vorzeichen:

$$\arg(\sqrt{z}) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Bei der Definition der Wurzelfunktion ist zu beachten, dass bei einer konsistenten Wahl des Vorzeichens (z.B. für den Hauptzweig) der Grenzwert bei Annäherung an die negative reelle Achse von oben sich von dem Grenzwert bei Annäherung von unten unterscheidet. Das Definitionsgebiet  $D$  sollte also keine geschlossene Kurve um den Ursprung enthalten.

Beispielsweise kann der Sektor

$$D : -\pi < \arg z < \pi, \quad |z| > 0,$$

gewählt werden.

# Möbius-Transformation

Eine linear rationale Funktion

$$f : z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

wird als Möbius-Transformation bezeichnet. Dabei dürfen  $z$  und  $w$  Werte in  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  annehmen.

Die Umkehrabbildung ist

$$w \mapsto z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Eine Möbius-Transformation bildet Kreise auf Kreise ab, wobei eine Gerade als entarteter Kreis anzusehen ist. Sie ist durch die Bilder  $w_k$  von drei Punkten  $z_k$  eindeutig bestimmt und kann mit Hilfe des Doppelverhältnisses in der Form

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

angegeben werden. Diese Identität kann nach  $z$  oder  $w$  aufgelöst werden, wobei die Konvention  $\frac{\infty}{\infty} = 1$  zu verwenden ist.

## Beweis:

(i) Umkehrabbildung:

Auflösen nach  $z \rightsquigarrow$  gebrochen rationaler Ausdruck gleichen Typs

(ii) Invarianz von Kreisen:

allgemeine Darstellung eines Kreises

$$s = \left| \frac{z - p}{z - q} \right|$$

Einsetzen von  $z = (-dw + b)/(cw - a) \rightsquigarrow$  Darstellung der Bildmenge

$$s = \left| \frac{(-dw + b) - p(cw - a)}{(-dw + b) - q(cw - a)} \right| = \left| \frac{-d - pc}{-d - qc} \right| \left| \frac{w - \tilde{p}}{w - \tilde{q}} \right|$$

$\rightsquigarrow$  Kreis in der  $w$ -Ebene

(iii) Doppelverhältnis:

Identität richtig für  $(w, z) = (w_k, z_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$

Auflösen nach  $z$  oder  $w \rightsquigarrow$  linear rationale Funktion

## Beispiel:

Berechnung der durch

$$1 \mapsto 0, \quad 0 \mapsto 1, \quad i \mapsto \infty$$

bestimmten Möbius-Transformation

(i) Doppelverhältnis:

$$\frac{w-1}{w-\infty} : \frac{0-1}{0-\infty} = \frac{z-0}{z-i} : \frac{1-0}{1-i}$$

Vereinfachung und Auflösen nach  $w \rightsquigarrow$

$$(w-1) \underbrace{\frac{\infty}{w-\infty}}_{=\frac{\infty}{-\infty}=-1} = \frac{z}{z-i} (1-i)$$

und

$$w = 1 - \frac{(1-i)z}{z-i} = \frac{iz-i}{z-i}$$

(ii) Einsetzen der Funktionswerte in die Abbildungsgleichung:

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

↪

$$f(1) = \frac{a + b}{c + d} = 0 \implies a = -b$$

$$f(0) = \frac{b}{d} = 1 \implies d = b$$

$$f(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ai - a}{ci - a} = \infty \implies c = -ia$$

Wahl von  $a = i$  ↪

$$c = 1, \quad b = -i, \quad d = -i$$

d.h. die obige Form für  $f$

# Exponentialfunktion

Aufgrund der Formel von Euler-Moivre,

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi ,$$

lässt sich die komplexe Exponentialfunktion durch

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

mit  $z = x + iy$  definieren.

Es gilt

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) ,$$

d.h.  $\exp(z)$  ist bezüglich des Imaginärteils  $y$  von  $z$  periodisch.



Weiter folgt, dass jeder durch  $\operatorname{Im} z \in [s, s + 2\pi)$  definierte Streifen bijektiv auf die gelochte Gauß-Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  abgebildet wird.

Horizontale Geraden  $z = t + iy$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , werden auf Halbgeraden  $w = se^{iy}$ ,  $s \in \mathbb{R}^+$ , und vertikale Geraden  $z = x + it$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , auf Kreise  $|w| = e^x$  abgebildet.

# Komplexer Logarithmus

Die komplexe Logarithmusfunktion  $w = \text{Ln}(z)$  ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $z = \exp(w)$ .

Mit Hilfe der Polardarstellung

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg(z),$$

gilt somit

$$\text{Ln}(z) = \ln(r) + i(\varphi + 2\pi k), \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z},$$

wobei  $\ln(r)$  der reelle Logarithmus von  $r$  ist.

Alternativ erhält man durch Einsetzen von

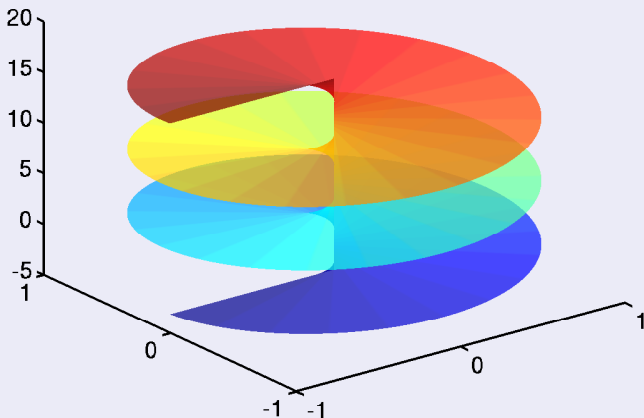
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi$$

eine Darstellung des Logarithmus als Funktion des Realteils  $x$  und Imaginärteils  $y$  von  $z$ . Dabei ist, analog zu Polarkoordinaten,  $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$  je nach dem Vorzeichen von  $x$  und  $y$  zu wählen.

Aufgrund der Periodizität der Exponentialfunktion ist  $\varphi$  nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt. Man sagt,  $\text{Ln}$  besitzt unendlich viele Zweige. Ein Standardbereich (Hauptzweig) ist

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi], \quad k = 0.$$

Obwohl  $\text{Ln}$  so auf der gelochten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  eindeutig definiert ist, erhält man keine global stetige Funktion. Beim Überschreiten der negativen reellen Achse ändert sich  $\arg(z)$  abrupt um  $2\pi$ . Eine singularitätenfreie Definition der Logarithmusfunktion ist nur auf Gebieten möglich, die weder 0 noch eine geschlossene Kurve um 0 enthalten.



Die Abbildung zeigt den Imaginärteil der Logarithmusfunktion für die Einheitskreisscheibe. Jede Windung entspricht einem Zweig der Funktion.

## Beispiel:

### Komplexer Logarithmus

- einer positiven reellen Zahl  $x$ :

$$\operatorname{Ln}(x) = \ln(x) + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- einer negativen reellen Zahl  $x$ :

$$\operatorname{Ln}(x) = \ln(-x) + \pi i(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(x = |x|e^{i\pi}, |x| = -x)$$

- von  $z = \sqrt{2}(1 + i)$ :

$$\operatorname{Ln}(z) = \operatorname{Ln}\left(2e^{i\pi/4}\right) = \ln(2) + \pi i(8k + 1)/4, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## Potenzen einer komplexen Zahl

Um Potenzen komplexer Zahlen zu bilden, verwendet man am geeignetsten die Polarform  $z = re^{i\varphi}$ . Für  $m \in \mathbb{Z}$  ist

$$z^m = r^m e^{im\varphi}.$$

Die gleiche Formel bleibt auch für rationale Exponenten  $m = p/q \in \mathbb{Q}$  richtig, allerdings ist das Ergebnis aufgrund der Mehrdeutigkeit der  $q$ -ten Einheitswurzel nicht eindeutig. Da die Gleichung  $w^q = 1$  die  $q$  Lösungen

$$w = w_q^k, \quad w_q = \exp(2\pi i/q), \quad k = 0, \dots, q-1$$

besitzt, erhält man entsprechend

$$r^{p/q} \exp(ip\varphi/q) w_q^{kp}, \quad k = 0, \dots, q-1$$

als mögliche Werte für  $z^{p/q}$ .

## Beispiel:

$$z = (-1 + i)^{2/3}$$

Polarform:  $r = \sqrt{1 + 1}$ ,  $\varphi = \arctan(1/(-1)) + \pi = 3\pi/4 \rightsquigarrow$

$$\left(\sqrt{2} \exp(3\pi i/4)\right)^{2/3} = \sqrt[3]{2} \exp(\pi i/2) w_3^{2k}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_3 = \exp(2\pi i/3)$$

mögliche Werte:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} i \exp(4\pi i/3) = \sqrt[3]{2} (\sqrt{3}/2 - i/2)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} i \exp(8\pi i/3) = \sqrt[3]{2} \left(-\sqrt{3}/2 - i/2\right)$$

Bestätigung durch Probe:

$$z_1^3 = \left( \sqrt[3]{2} i \exp(4\pi i/3) \right)^3 = 2i^3 \underbrace{\exp(4\pi i)}_{=1} = -2i = (-1 + i)^2$$

d.h.  $z_1 = (-1 + i)^{2/3}$

Probe für  $z_0$  und  $z_2$  analog



## Beispiel:

unendlich viele Lösungen für irrationale oder imaginäre Exponenten

- unendlich viele Lösungen auf dem Einheitskreis:

$$\begin{aligned}i^\pi &= \exp((\pi/2 + 2\pi k)i)^\pi \\ &= \exp(i[\pi^2/2 + 2\pi^2 k]), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- unendlich viele Lösungen auf einer Halbgeraden:

$$\begin{aligned}\pi^i &= \exp(\ln \pi + 2\pi ki)^i = \exp(i \ln \pi - 2\pi k) \\ &= \exp(-2\pi k) \exp(i \ln \pi), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- unendlich viele Lösungen auf der positiven reellen Achse:

$$\begin{aligned}i^i &= \exp((\pi/2 + 2\pi k)i)^i \\ &= \exp(-\pi/2 - 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

# Komplexe Differenzierbarkeit

Eine komplexe Funktion  $f$  ist im Punkt  $z$  komplex differenzierbar, wenn der als Ableitung bezeichnete Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

existiert und unabhängig von der Folge  $\Delta z$  ist.

Ist  $f$  in jedem Punkt einer offenen Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, so heißt  $f$  komplex differenzierbar oder analytisch in  $D$ .

## Beispiel:

(i)  $f(z) = z^2$ :

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z$$

$\implies f$  komplex differenzierbar  $\forall z \in \mathbb{C}$

(ii)  $f(z) = 1/z$ :

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{1/(z + \Delta z) - 1/z}{\Delta z} = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} -\frac{1}{(z + \Delta z)z} = -\frac{1}{z^2}$$

$\implies f$  komplex differenzierbar  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

## Beispiel:

$$f(z) = \operatorname{Re} z$$

(i)  $\Delta z = t \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(x + t + iy) - \operatorname{Re}(x + iy)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x + t - x}{t} = 1$$

(ii)  $\Delta z = it, t \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(x + i(t + y)) - \operatorname{Re}(x + iy)}{it} = \lim_{it \rightarrow 0} \frac{x - x}{it} = 0$$

$\implies f$  an keinem Punkt  $z = x + iy$  komplex differenzierbar

# Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Eine komplexe Funktion

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

ist genau dann komplex differenzierbar, wenn die bivariate reelle Funktion  $f(x, y) = (u, v)^t$  total differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

In diesem Fall ist

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

Es sind dann sowohl  $u$  als auch  $v$  harmonisch, d.h.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 = \Delta v.$$

## Beweis:

(i) Komplexe Differenzierbarkeit:

$$f(z + \Delta z) = f(z) + f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

Aufspaltung in Real- und Imaginärteil mit  $f'(z) = a + ib \rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} u(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o\left(\left|\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}\right|\right)$$

wobei  $f'(z)\Delta z = (a\Delta x - b\Delta y) + (a\Delta y + b\Delta x)i$  und somit

$$[\dots] = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z)\Delta z \\ \operatorname{Im} f'(z)\Delta z \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$  reelle Differenzierbarkeit mit  $J$  der Jacobi-Matrix

Vergleich mit der reellen Jacobi Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

↪ Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

(ii) Komplexe Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(z) &= a + ib \\ &= u_x + iv_x = v_y - iu_y \end{aligned}$$

(iii) Harmonizität:

Vertauschbarkeit partieller Ableitungen ↪

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0$$

analog:  $\Delta v = 0$

## Beispiel:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cos y}_u + i \underbrace{e^x \sin y}_v$$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen erfüllt:

$$u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y)$$

$$u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y)$$

$\implies$  komplexe Differenzierbarkeit  $\forall z$  und

$$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

$u$  und  $v$  harmonisch:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = e^x \cos y + e^x(-\cos y) = 0$$

analog:  $\Delta v = 0$



## Konjugiert harmonische Funktionen

Jede auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  zweimal stetig differenzierbare harmonische Funktion  $u$  ist Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion  $f$ :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy.$$

Die reelle Funktion  $v = \operatorname{Im} f$  erfüllt ebenfalls  $\Delta v = 0$ . Sie wird als konjugiert harmonisch zu  $u$  bezeichnet und  $f$  als komplexes Potential.

## Beweis:

betrachte das Vektorfeld

$$G = (G_x, G_y)^t = (-u_y, u_x)^t$$

$\Delta u = 0 \implies$  Integrabilitätsbedingung

$$\partial_x G_y - \partial_y G_x = 0$$

$\implies$  Existenz eines Potentials  $v$ , d.h.

$$G = \text{grad } v$$

$\Leftrightarrow$  Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$-u_y = v_x, \quad u_x = v_y$$

$\implies f = u + iv$  komplex differenzierbar und  $v$  ebenfalls harmonisch

## Beispiel:

Konstruktion einer konjugiert harmonischen Funktion  $v$  zu

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

prüfe Harmonizität:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (6x - 0) - 6x = 0 \quad \checkmark$$

integriere die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$$\bullet \quad v_x = -u_y = -(-6xy) \quad \implies$$

$$v = 3x^2y + c(y)$$

$$\bullet \quad v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2 \quad \implies$$

$$3x^2 + c'(y) = 3x^2 - 3y^2, \quad \text{d.h. } c(y) = -y^3 + C$$

$\rightsquigarrow$  komplexes Potential

$$f(z) = u + iv = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + C) = (x + iy)^3 + C = z^3 + C$$

# Konforme Abbildung

Eine auf dem Definitionsgebiet  $D$  injektive komplex differenzierbare Funktion  $z \mapsto w = f(z)$  bezeichnet man als konforme Abbildung. Konforme Abbildungen sind isotrop und winkeltreu. Bezeichnet

$$t \mapsto w(t) = f(z(t))$$

das Bild einer Kurve unter einer komplex differenzierbaren Abbildung  $f$ , dann gilt für das Bild der Tangente in einem Punkt  $z_0 = z(t_0)$

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0).$$

Unabhängig von der Wahl der Kurve  $z$  wird die Tangente in  $z_0$  um den Faktor  $|f'(z_0)|$  gestreckt und um den Winkel  $\arg(f'(z_0))$  gedreht. Insbesondere bleibt der Schnittwinkel zweier Kurven unter der Abbildung  $f$  erhalten. Konforme Abbildungen können damit zur Transformation orthogonaler Gitter verwendet werden.

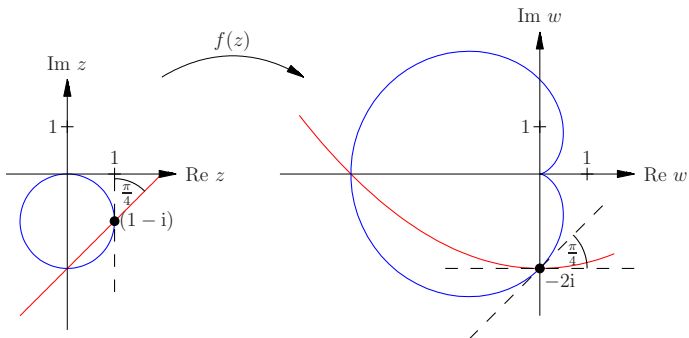
## Beispiel:

Gerade  $C_1: z_1(t) = -2i + t(1 + i)$

Kreis  $C_2: z_2(t) = 2/(t + i)$

Abbildungung

$$f(z) = z^2, \quad f'(z) = 2z$$



Schnittpunkt  $z_0 = 1 - i$  (Parameter  $t_0 = 1$  für beide Kurven)

Tangentenvektoren im Schnittpunkt:

$$z_1'(1) = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$z_2'(1) = -\frac{2}{(t+i)^2} \Big|_{t=1} = i = e^{i\pi/2}$$

Schnittwinkel:  $\pi/4$

Schnittpunkt der Bildkurven  $f(C_1)$  und  $f(C_2)$ :  $w_0 = z_0^2 = (1 - i)^2 = -2i$

Tangentenvektoren

$$f'(1 - i)z_1'(1) = 2(1 - i)(1 + i) = 4$$

$$f'(1 - i)z_2'(1) = 2(1 - i)i = 2(i + 1) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$\rightsquigarrow$  gleicher Schnittwinkel  $\pi/4$  der Bildkurven

Streckungsfaktor:  $|f'(1 - i)| = |2(1 - i)| = 2\sqrt{2}$

## Beispiel:

konforme Abbildung

$$f : z \mapsto w = z^2$$

reelle Darstellung mit  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \quad \Leftrightarrow \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

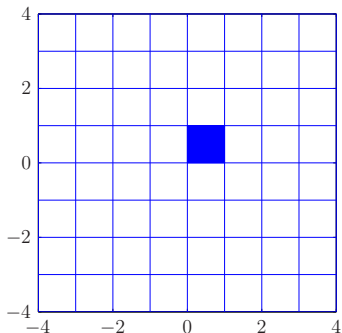
Winkeltreue  $\implies$   $f$  und  $f^{-1}$  erhalten die Orthogonalität von Koordinatengittern

(i) Gitter  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ :

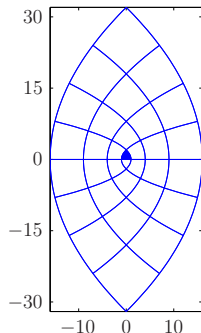
$\rightsquigarrow$  zwei Scharen orthogonaler Parabeln

$$u + \left(\frac{v}{2x}\right)^2 - x^2 = 0, \quad u - \left(\frac{v}{2y}\right)^2 + y^2 = 0$$

(jeweils  $x$  bzw.  $y$  als Parameter; Herleitung der impliziten Darstellung durch Elimination von  $y$  bzw.  $x$  aus der Gleichung für  $v$ )



$xy$ -Ebene



$uv$ -Ebene

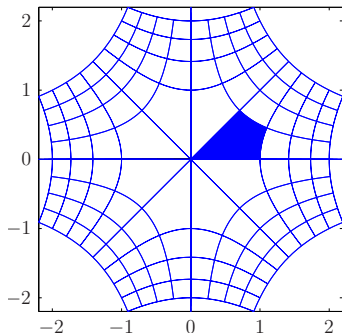


(ii) Gitter  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ :

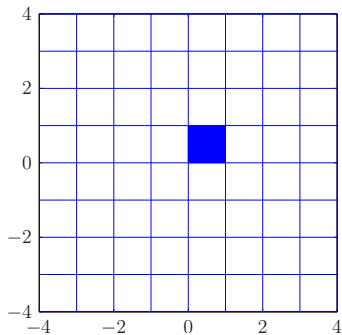
Umkehrabbildung  $z = \sqrt{w} \rightsquigarrow$  zwei Scharen orthogonaler Hyperbeln

$$x^2 - y^2 = u, \quad 2xy = v$$

( $u, v$  Parameter)



$xy$ -Ebene



$uv$ -Ebene

# Exponentialfunktion und Logarithmus als konforme Abbildungen

Durch  $w = e^z$  wird der Streifen

$$z : 0 < \operatorname{Im} z < \gamma$$

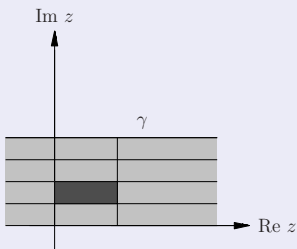
mit  $\gamma \leq 2\pi$  auf den Sektor

$$w : 0 < \arg w < \gamma$$

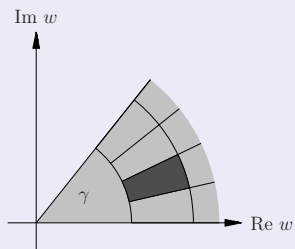
abgebildet.

Insbesondere erhält man für  $\gamma = 2\pi$  als Bild die geschlitzte Ebene  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ .

Durch Verknüpfung mit einer Potenzfunktion,  $z \mapsto w^s$ , kann der Öffnungswinkel des Sektors verändert werden:  $\gamma \rightarrow \gamma s$ .



$z$ -Ebene



$w$ -Ebene

Entsprechend kann man mit Hilfe des komplexen Logarithmus Sektoren konform auf Streifen abbilden.

## Beispiel:

konforme Abbildung eines Streifens auf eine Kreisscheibe:

$$0 < \operatorname{Im} z < \pi/2 \quad \rightarrow \quad |w| < 1$$

Zerlegung in elementare Teilabbildungen

- Streifen  $\rightarrow$  Sektor:

$$\xi = e^z : \quad 0 < \arg \xi < \pi/2$$

- Sektor  $\rightarrow$  Halbebene:

$$\eta = \xi^2 : \quad 0 < \operatorname{Im} \eta$$

- (iii) Halbebene  $\rightarrow$  Kreisscheibe:

$$w = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}$$

bestimme die Koeffizienten der Möbius-Transformation  $\eta \mapsto w$  durch Wahl geeigneter Bildpunkte mit konsistenter Reihenfolge (Gebiet liegt „links“)

$$\eta = 0, 1, \infty \quad \mapsto \quad w = 1, i, -1$$

$$0 \mapsto 1 \quad \implies \quad d = b$$

$$\infty \mapsto -1 \quad \implies \quad c = -a \quad (\text{o.B.d.A. } a = 1)$$

$$1 \mapsto i \quad \implies$$

$$\frac{1+b}{-1+b} = i \quad \Leftrightarrow \quad b = -i$$

zusammengesetzte Transformation

$$w = \frac{\eta - i}{-\eta - i} = \frac{\xi^2 - i}{-\xi^2 - i} = \frac{e^{2z} - i}{-e^{2z} - i}$$

## Beispiel:

### Konstruktion der Joukowski-Abbildung

$$z \mapsto w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad K : |z| < 1 \rightarrow D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

- Möbius-Transformation:  $K \rightarrow$  Halbebene  $H : \operatorname{Re} z > 0$

$$\xi = \frac{1+z}{1-z}, \quad 1, i, -1 \mapsto \infty, i, 0$$

- Quadrieren:  $H \rightarrow$  geschlitzte Ebene  $E = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$

$$\eta = \xi^2, \quad |\arg \xi| < \frac{\pi}{2} \rightarrow |\arg \eta| < \pi$$

- Möbius-Transformation:  $E \rightarrow D$

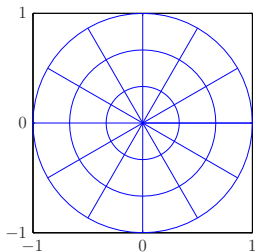
$$w = \frac{\eta + 1}{\eta - 1}, \quad -\infty, -1, 0 \mapsto 1, 0, -1$$

$\rightsquigarrow$  korrekte Abbildung des Komplements:  $(-\infty, 0) \rightarrow (-1, 1)$

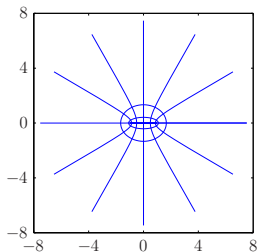
## Gesamtabbildung

$$w = \frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1} = \dots = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Bild des orthogonalen Gitters  $r = |z| = \text{const}$ ,  $\varphi = \arg(z) = \text{const}$



z-Ebene



w-Ebene

# Hauptsatz über konforme Abbildungen

Jedes einfach zusammenhängende, echte Teilgebiet der komplexen Ebene kann durch eine konforme Abbildung  $f$  auf die Einheitskreisscheibe abgebildet werden.

Für einen beliebigen Punkt  $z_0 \in D$  kann die Abbildung durch die Bedingungen

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0$$

eindeutig festgelegt werden.



## Beispiel:

konforme Abbildung der Halbkreisscheibe auf das Innere des Einheitskreises

$$D : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0 \rightarrow K : |w| < 1$$

Konstruktion mit mehreren Teilabbildungen

- Möbius-Transformation:

$$\xi = \frac{z + i}{iz + 1}$$

$$-i, 1, i \mapsto 0, 1, \infty$$

$$\implies \text{Halbkreis} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\text{imaginäre Achse invariant, } -i, i \mapsto 0, \infty$$

$$\implies \text{Segment zwischen } -i \text{ und } i \rightarrow \text{positive imaginäre Achse}$$

$$\text{Vereinigung der Teilränder} \rightsquigarrow \text{korrekte Abbildung von } \partial D$$

- Quadrieren:

$$\eta = \xi^2$$

$$\text{erster Quadrant} \rightarrow \text{obere Halbebene } H$$

- Möbius-Transformation:

$$w = \frac{i - \eta}{i + \eta}$$

$$0, 1, \infty \rightarrow 1, i, -1 \quad \implies \quad H \rightarrow K$$

Gesamtabbildung

$$w = \frac{i - \left(\frac{z+i}{iz+1}\right)^2}{i + \left(\frac{z+i}{iz+1}\right)^2} = \dots = \frac{-i(z^2 + 2z - 1)}{z^2 - 2z - 1}$$

# Integral einer komplexen Funktion

Das Integral einer komplexwertigen Funktion

$$f(t) = u(t) + iv(t), \quad t \in [a, b],$$

ist durch

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

definiert.

Es ist in der üblichen Weise linear und additiv.

Darüber hinaus gilt

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

## Beispiel:

$$f(t) = e^{it}$$

(i) Integral über das Intervall  $[0, \varphi]$ :

$$\begin{aligned}\int_0^{\varphi} e^{it} dt &= \int_0^{\varphi} \cos t dt + i \int_0^{\varphi} \sin t dt \\ &= [\sin t]_0^{\varphi} + i[-\cos t]_0^{\varphi} \\ &= \sin \varphi + i(1 - \cos \varphi)\end{aligned}$$

alternativ: direkte Verwendung einer komplexen Stammfunktion

$$\left[ \frac{e^{it}}{i} \right]_0^{\varphi} = \frac{e^{i\varphi} - 1}{i}$$

(ii) Illustration der Betragsungleichung:  
Integral des Betrages

$$\int_0^{\varphi} |f(t)| dt \stackrel{|f|=1}{=} \varphi$$

Betrag des Integrals

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\varphi} f(t) dt \right| &= |\sin \varphi + i(1 - \cos \varphi)| = \sqrt{\sin^2 \varphi + 1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} \stackrel{\text{Add. Thm}}{=} \sqrt{2 - 2(\cos^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi/2))} \\ &= |2 \sin(\varphi/2)| \end{aligned}$$

geometrische Definition der Sinusfunktion  $\rightsquigarrow |\sin(t)| \leq |t|$  und

$$\left| \int f \right| = |2 \sin(\varphi/2)| \leq \varphi = \int |f|$$

# Komplexes Kurvenintegral

Für einen stetig differenzierbaren Weg

$$C : t \mapsto z(t), \quad t \in [a, b],$$

in der komplexen Ebene bezeichnet man

$$\int_C f dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt$$

als komplexes Kurvenintegral.

Die Definition ist bei gleichbleibender Orientierung unabhängig von der gewählten Parametrisierung des Weges  $C$ .

Bei Umkehrung der Durchlaufrichtung ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

## Beweis:

Umparametrisierung  $t \mapsto s$  mit  $ds/dt > 0$ :

$$z(t), t \in [a, b] \leftrightarrow \tilde{z}(s), s \in [c, d]$$

$\rightsquigarrow$  Variablensubstitution im Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = \int_a^b f(\tilde{z}(s(t))) \frac{d}{dt} \tilde{z}(s(t)) dt \\ &= \int_a^b f(\tilde{z}(s(t))) \tilde{z}'(s(t))s'(t) dt = \int_c^d f(\tilde{z}(s))\tilde{z}'(s) ds \\ &= \int_C f(\tilde{z}) d\tilde{z} \end{aligned}$$

keine Veränderung bei orientierungserhaltenden Umparametrisierungen  
Vorzeichenänderung bei Vertauschung der Grenzen (Umkehrung des Durchlaufsinns)

## Beispiel:

integriere  $f(z) = z$  über die geradlinige Verbindung

$$C : z(t) = (1 - t)p + tq, \quad t \in [0, 1],$$

zweier Punkte  $p$  und  $q$

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \int_0^1 (p + t(q - p)) \underbrace{(q - p)}_{z'(t)} dt \\ &= \int_0^1 p(q - p) + t(q - p)^2 dt \\ &= pq - p^2 + (q - p)^2/2 = q^2/2 - p^2/2 \end{aligned}$$



## Beispiel:

Kurvenintegral über den Kreis

$$C : z(t) = re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$z'(t) = ire^{it} = iz, \quad dz = iz dt$$

- $f(z) = 1/z$ :

$$\int_C f dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$$

- $f(z) = z^n, n \neq -1$ :

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= ir^{n+1} \left[ \frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

# Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals

Das komplexe Kurvenintegral ist linear bezüglich des Integranden, d.h.

$$\int_C f + g \, dz = \int_C f \, dz + \int_C g \, dz .$$

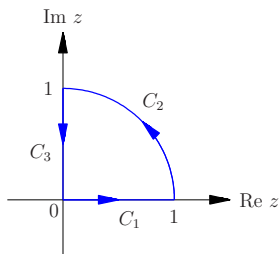
Darüber hinaus ist  $\int \dots dz$  additiv bezüglich des Integrationsweges. Setzt sich ein (orientierter) Weg  $C$  aus zwei Wegen  $C_1$  und  $C_2$  zusammen,  $C = C_1 + C_2$ , so gilt

$$\int_C f \, dz = \int_{C_1} f \, dz + \int_{C_2} f \, dz .$$

Insbesondere ist  $\int_C f \, dz = - \int_{-C} f \, dz$ , wobei  $-C$  den in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg  $C$  bezeichnet.

## Beispiel:

Kurvenintegral der Funktion  $f(z) = \sqrt{z}$  entlang des skizzierten Weges



Additivität  $\rightsquigarrow$

$$\int_C \sqrt{z} dz = \int_{C_1} \dots dz + \int_{C_2} \dots dz + \int_{C_3} \dots dz$$

- $C_1: t \mapsto z(t) = t, 0 \leq t \leq 1, dz = dt$

$$\int_0^1 \sqrt{t} dt = \left[ \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

- $C_2: t \mapsto z(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, dz = ie^{it} dt$

$$\int_0^{\pi/2} e^{it/2} ie^{it} dt = \int_0^{\pi/2} ie^{3it/2} dt = \left[ \frac{2}{3} e^{3it/2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} e^{3i\pi/4} - \frac{2}{3}$$

- $C_3: t \mapsto z(t) = i - ti, 0 \leq t \leq 1, dz = -i dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{i(1-t)} (-i) dt &= \int_0^1 -ie^{i\pi/4} \sqrt{1-t} dt = \int_0^1 -e^{i\pi/2} e^{i\pi/4} \sqrt{1-t} dt \\ &= \left[ \frac{2}{3} e^{3i\pi/4} (1-t)^{3/2} \right]_0^1 = -\frac{2}{3} e^{3i\pi/4} \end{aligned}$$

gesamtes Kurvenintegral:

$$\int_C \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} + \left( \frac{2}{3} e^{3i\pi/4} - \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3} e^{3i\pi/4} = 0$$

## Komplexe Stammfunktion

Ist  $f$  in einem Gebiet  $D$  komplex differenzierbar, so gilt für einen in  $D$  verlaufenden Weg  $C$  von  $z_0$  nach  $z_1$

$$\int_C f' dz = f(z_1) - f(z_0).$$

Insbesondere ist also das komplexe Kurvenintegral für Funktionen mit komplexer Stammfunktion wegunabhängig und verschwindet für einen geschlossenen Weg.

## Beweis:

Weg von  $z_0$  nach  $z_1$

$$C : t \mapsto z(t), t_0 \leq t \leq t_1$$

Definition des komplexen Kurvenintegrals  $\rightsquigarrow$

$$\int_C f' dz = \int_{t_0}^{t_1} f'(z(t))z'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (f(z(t))) dt = f(z_1) - f(z_0)$$

letzte Gleichheit nach Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung  
(Aufspaltung von  $f$  in Real- und Imaginärteil)

## Beispiel:

Kurvenintegral von  $f(z) = e^z$  über  $C : z(t) = 1 + t(1 + i)$ ,  $t \in [0, 1]$

- Direkte Berechnung:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad dz = (1 + i) dt \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \int_C e^z dz &= \int_0^1 e^{1+t} (\cos t + i \sin t) (1 + i) dt \\ &= \int_0^1 e^{1+t} (\cos t - \sin t) dt + i \int_0^1 e^{1+t} (\cos t + \sin t) dt \\ &= [e^{1+t} \cos t]_0^1 + i [e^{1+t} \sin t]_0^1 \\ &= (e^2 \cos(1) - e) + i (e^2 \sin(1) - 0) = e^{2+i} - e \end{aligned}$$



- Differenz der Werte der Stammfunktion:

$$f = F', \quad F(z) = e^z$$

$C$  : geradliniger Weg von  $z = 1$  nach  $z = 2 + i$

Existenz der Stammfunktion  $\implies$

$$\int_C e^z dz = [e^z]_{z(0)=1}^{z(1)=2+i} = e^{2+i} - e$$

(gleiches Resultat)

# Singularitäten einer komplexen Funktion

Ist eine komplexe Funktion  $f$  in der Umgebung  $D \setminus a$  eines Punktes  $a$  analytisch, so lässt sich der Typ der Definitionslücke wie folgt klassifizieren.

- Schwache Singularität:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0,$$

aufgrund der Cauchyschen Integralformel immer hebbar

- Pol  $n$ -ter Ordnung:

$$|(z - a)^n f(z)| = O(1), \quad z \rightarrow a,$$

$n \in \mathbb{N}$  minimal

- wesentliche Singularität:

$$(z - a)^n f(z) \neq O(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Man beachte, dass die Klassifizierung nicht auf Funktionen wie  $\text{Ln}(z - a)$  oder  $\sqrt{z - a}$  anwendbar ist, da in keinem Kreisring um  $a$  eine konsistente stetige Definition möglich ist.

## Beispiel:

verschiedene Singularitäten bei  $z = 0$

- Schwache Singularität, z.B.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

denn  $|zf(z)| \rightarrow |\sin(0)| = 0$  für  $z \rightarrow 0$

- Pol zweiter Ordnung, z.B.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2},$$

denn  $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \cos 0 = 1$  und  $z f(z) = \cos z / z \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow 0$

- Wesentliche Singularität, z.B.

$$f(z) = \exp(1/z),$$

denn  $t^n \exp(1/t) \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$

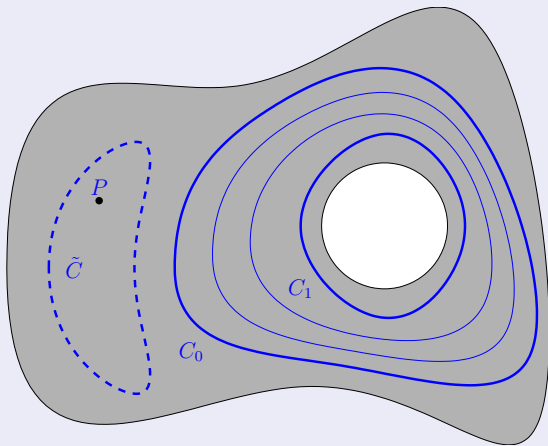
## Homotopie von Kurven in der komplexen Ebene

Zwei Kurven  $C_0$  und  $C_1$  in einem Gebiet  $D$  heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung

$$[0, 1]^2 \ni (s, t) \mapsto z(s, t) \in D$$

gibt, für die  $t \mapsto z(k, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , Parametrisierungen von  $C_k$ ,  $k = 0, 1$ , sind.

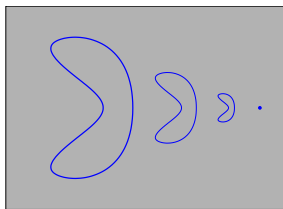
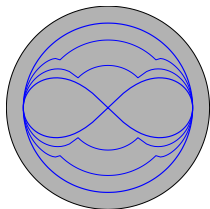
Analog bezeichnet man  $\tilde{C} : t \mapsto z(0, t)$  als homotop zu einem Punkt  $P$ , wenn  $z(1, t) = p$ ,  $t \in [0, 1]$ , ist. Anschaulich bedeutet dies, dass sich  $\tilde{C}$  in  $D$  zu einem Punkt zusammenziehen lässt.



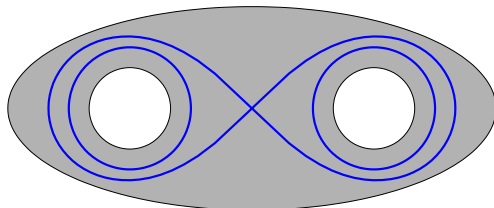
In der Abbildung sind die fett gezeichneten Kurven  $C_0$  und  $C_1$  homotop. Aufgrund des Loches im Gebiet besteht jedoch keine Homotopie zur gestrichelten Kurve  $\tilde{C}$ , die zu jedem Punkt  $P$  in  $D$  homotop ist.

## Beispiel:

homotope Kurven



nicht homotope Kurven



## Cauchys Theorem

Für ein beschränktes Gebiet  $D$ , das durch entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte (Gebiet liegt „links“) stückweise stetig differenzierbare Kurven  $C_k$  berandet wird, und eine in  $D$  analytische und in  $\bar{D}$  stetige Funktion  $f$  gilt

$$\int_C f(z) dz = 0$$

mit  $C = \sum_k C_k$ .

Insbesondere ist das komplexe Kurvenintegral von  $f$  über geschlossene Wege Null, die ein Teilgebiet von  $D$  beranden. Allgemeiner verschwindet  $\int_C f(z) dz$  für jeden Weg, der in  $D$  zu einem Punkt homotop ist.



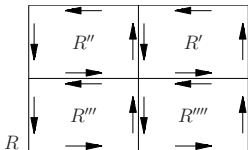
## Beweis:

(i) Spezialfall eines Rechtecks  $R$  und einer in einer Umgebung von  $R$  analytischen Funktion  $f$ :

definiere

$$s(R) = \int_C f dz$$

mit Randkurve  $C = \partial R$  mathematisch positiv orientiert



Aufteilung von  $R$  in vier kongruente Rechtecke  $R'$ ,  $R''$ ,  $R'''$  und  $R''''$   $\rightsquigarrow$

$$s(R) = s(R') + s(R'') + s(R''') + s(R''''')$$

aufgrund der Aufhebung entgegengesetzter Wege

für mindestens ein Teil-Rechteck  $R_1$  von  $R = R_0$  gilt

$$|s(R_1)| \geq \frac{1}{4}|s(R)|$$

Iteration des Unterteilungsprozesses  $\rightsquigarrow R = R_0 \supset R_1 \supset \dots$  mit

$$|s(R_j)| \geq \frac{1}{4}|s(R_{j-1})| \geq \dots \geq 4^{-j}|s(R_0)|$$

$R_j \rightarrow$  Punkt  $z_*$ , d.h.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists j(\delta) : \quad R_j \subset \{z : |z - z_*| < \delta\} \quad \text{für } j > j(\delta)$$

$f$  komplex differenzierbar  $\implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) : \quad |f(z) - f(z_*) - f'(z_*)(z - z_*)| < \varepsilon|z - z_*|, \quad |z - z_*| < \delta$$

Existenz von Stammfunktionen für die Monome  $\implies$

$$\int_{C_j} f(z_*) dz = \int_{C_j} f'(z_*)(z - z_*) dz = 0, \quad C_j = \partial R_j$$

$j > j(\delta(\varepsilon)) \implies$

$$|s(R_j)| = \left| \int_{C_j} f(z) - f(z_*) - f'(z_*)(z - z_*) dz \right| \leq \varepsilon \int_{C_j} |z - z_*| dz \leq \varepsilon d_j L_j$$

wobei  $d_j$  die Länge der Diagonale und  $L_j$  die Länge des Randes von  $R_j$  bezeichnet

$d_j = 2^{-j} d_0, \quad L_j = 2^{-j} L_0 \implies$

$$|s(R_0)| \leq 4^j |s(R_j)| \leq \varepsilon (4^j d_j L_j) = \varepsilon d_0 L_0$$

$\varepsilon$  beliebig  $\implies |s(R)| = 0$

(ii) Beweisidee im allgemeinen Fall:

- analoger Beweis für ein Dreieck
- Approximation von  $\partial D$  durch einen polygonalen, ganz in  $D$  enthaltenen Rand
- Triangulierung eines polygonalen Gebietes;  
Aufhebung der Integrale über innere Kanten  $\rightsquigarrow$  Reduktion auf  
den Fall eines Dreiecks

## Beispiel:

illustriere Cauchys Theorem für den Kreis

$$C : z(t) = a + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(i)  $f(z) = (z - a)^n$  ( $n \neq -1$ ):

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \int_0^{2\pi} (z(t) - a)^n z'(t) dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} r i e^{it} dt \\ &= \left[ r^{n+1} \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

im Einklang mit Cauchys Theorem

Das Verschwinden des Integrals folgt ebenfalls aus der Existenz einer Stammfunktion.

(ii)  $f(z) = e^{z^2}$ :

keine explizite Stammfunktion

nicht analytisch berechenbares Kurvenintegral

$$\int_0^{2\pi} e^{(a+re^{it})^2} rie^{it} dt$$

Cauchys Theorem  $\implies \int_C f dz = 0$

## Beispiel:

reelle Darstellung des Kurvenintegrals  $\int_C f dz$

$$\int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx)$$

Satz von Green,  $\int_{\partial D} \varphi dx + \psi dy = \iint_D \psi_x - \varphi_y dx dy \implies$

$$\int_C f dz = - \int_D (u_y + v_x) dx dy + i \int_D (u_x - v_y) dx dy, \quad C = \partial D$$

Null aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Voraussetzung: Stetigkeit der partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$

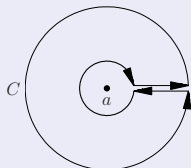
Deshalb keine einfache Beweisalternative, da üblicherweise die Stetigkeit von  $f'$  mit dem zu beweisenden Satz von Cauchy hergeleitet wird!

# Umlaufzahl

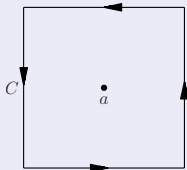
Für einen stückweise differenzierbaren, geschlossenen Weg  $C$  definiert man für  $a \notin C$

$$n(C, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a}$$

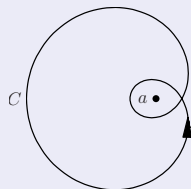
als die Umlaufzahl von  $C$  bezüglich  $a$ .



$$n(C, a) = 0$$



$$n(C, a) = 1$$



$$n(C, a) = 2$$

Anschaulich gibt  $n(C, a)$  an, wie oft  $C$  den Punkt  $a$  umrundet. Insbesondere ist  $n(C, a) = 1$  für den Rand  $C$  eines Gebietes, das  $a$  enthält.



## Beweis:

$C: t \mapsto z(t), t_0 \leq t \leq t_1$

zu zeigen:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{z'(s)}{z(s) - a} ds = k(2\pi i)$$

für  $t = t_1$  bzw. dazu äquivalent, dass  $\exp(\varphi(t_1)) = 1$

betrachte

$$p(t) = \exp(-\varphi(t))(z(t) - a)$$

Produkt- und Kettenregel  $\rightsquigarrow$

$$p' = p \underbrace{\frac{-z'}{z-a}}_{-\varphi'(t)} + \frac{p}{z-a} z' = 0$$

bis auf Sprungstellen von  $z'$

$\implies$   $p$  konstant, insbesondere  $p(t_0) = p(t_1)$ , und

$$\exp(\varphi(t_1)) = \frac{z(t_1) - a}{p(t_1)} = \frac{z(t_1) - a}{p(t_0)} = 1$$

wegen  $\varphi(t_0) = 0$ ,  $p(t_0) = z(t_0) - a$  und  $z(t_0) = z(t_1)$

# Cauchysche Integralformel

Für ein beschränktes Gebiet  $D$ , das durch entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte (Gebiet liegt „links“) stückweise stetig differenzierbare Kurven  $C_k$  berandet wird, und eine in  $D$  analytische und in  $\bar{D}$  stetige Funktion  $f$  gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad C = \sum_k C_k,$$

für alle  $z \in D$ .

Durch Differenzieren unter dem Integral erhält man eine Darstellung für die Ableitungen:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in D.$$

Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt somit die Existenz und Stetigkeit von Ableitungen beliebiger Ordnung.

## Beweis:

schneide aus dem Gebiet  $D$  eine Kreisscheibe  $D_r$  um  $z$  mit Radius  $r$  aus  
Mit  $C_r$  dem entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand von  $D_r$   
berandet  $C - C_r$  das Teilgebiet  $D \setminus D_r$  (korrekte Orientierung des Randes:  
 $D \setminus D_r$  liegt „links“ von  $-C_r$ ).

Cauchys Theorem  $\implies$

$$0 = \int_{C - C_r} \frac{f(w)}{w - z} dz \iff \int_C \dots = \int_{C_r} \dots$$

denn der Integrand ist auf  $D \setminus D_r$  analytisch

berechne das Integral über  $C_r$

Stetigkeit von  $f = u + iv \rightsquigarrow$

$$\int_{C_r} \dots = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i (u(z + re^{is}) + iv(z + re^{i\tilde{s}}))$$

für  $s, \tilde{s} \in [0, 2\pi]$  nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$\int_{C_r} \dots \rightarrow 2\pi if(z)$  für  $r \rightarrow 0 \implies$  behauptete Integralformel

## Beispiel:

$$f(z) = e^z, \quad C : t \mapsto e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Cauchysche Integralformel für einen Kreis  $\implies$

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

Versuch der direkten Berechnung:

$$dz = i e^{it} dt \quad \rightsquigarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} dt$$

kein Erfolg!

## Beispiel:

$$f(w) = \sum_{k=0}^m a_k (w - z)^k, \quad C : t \mapsto z + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Integraldarstellung für Ableitungen  $\implies$

$$2\pi i \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw = \left[ \sum_{k=0}^m a_k \int_C (w - z)^{k-n-1} dw \right]$$

$k \neq n$ :  $\exists$  Stammfunktion für die Monome  $(w - z)^{k-n-1}$  und  $\int_C \dots = 0$   
 $\implies [\dots] = 0$  für  $m < n$  und für  $m \geq n$  gilt

$$[\dots] = a_n \int_C \frac{dw}{w - z} = a_n (2\pi i) \underbrace{n(C, z)}_{\text{Umlaufzahl}} = 2\pi i a_n$$

konsistent mit der direkten Berechnung der Ableitung

## Mittelwerteigenschaft

Für eine auf einer Kreisscheibe um  $z$  mit Radius  $> r$  komplex differenzierbare Funktion ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

Diese Identität gilt auch separat für Real- und Imaginärteil von  $f$ , insbesondere also auch für harmonische Funktionen.

## Beweis:

Cauchysche Integralformel für den Kreis

$$C : t \mapsto w = z + re^{it}, \quad dw = i re^{it} dt$$

$\implies$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} i re^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt \end{aligned}$$



# Maximumprinzip

Für eine in einem Gebiet  $D$  analytische, nicht konstante Funktion  $f$  besitzt  $|f|$  kein Maximum in  $D$ .

Ist  $f$  auf  $\overline{D} = D \cup C$  stetig, wobei  $C = \partial D$  der Rand von  $D$  ist, so gilt deshalb

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in C} |f(z)|,$$

d.h. das Maximum des Betrages wird auf dem Rand angenommen.

## Beweis:

(i) zeige:  $f$  ist konstant =  $f(z)$  auf jedem Kreis

$$C : t \mapsto w = z + re^{it}$$

in  $D$  um eine Maximalstelle  $z$  von  $|f|$

Multiplikation mit  $e^{i\varphi} \rightsquigarrow$  o.B.d.A.  $f(z)$  reell und positiv  
(Behauptung trivial, falls  $|f(z)| = 0$ )

$$\implies \operatorname{Re} f(w) \leq |f(w)| \leq f(z)$$

Annahme:  $f(w) \neq f(z)$  für ein  $w = z + re^{it} \in C$

$\implies$

$$\operatorname{Re} f(w) < f(z) = \operatorname{Re} f(z)$$

Mittelwerteigenschaft  $\rightsquigarrow$  Widerspruch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z + re^{it}) dt < f(z),$$

da die Ungleichung  $\operatorname{Re} f(w) < f(z)$  in einer Umgebung von  $w$  gültig bleibt

(ii) verbinde einen beliebigen Punkt in  $w \in D$  durch eine Kurve  $\Gamma$  mit  $z$  und überdecke  $\Gamma$  mit Kreisscheiben

$\implies f$  konstant entlang von  $\Gamma$

$\implies f(w) = f(z)$

## Beispiel:

illustriere das Maximumprinzip für

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

auf dem Rechteck

$$D : x = \operatorname{Re} z \in (-\pi, \pi), \quad y = \operatorname{Im} z \in (-1, 1)$$

berechne den Betrag

$$\begin{aligned} |\cos(z)|^2 &= \cos(z)\overline{\cos(z)} = \frac{1}{4}(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y)(e^{-ix}e^{-y} + e^{ix}e^y) \\ &= \frac{1}{4}(e^{-2y} + 2\cos(2x) + e^{2y}) \end{aligned}$$

Maximum an den Ecken des Randes:  $x \in \{-\pi, \pi\}$ ,  $y \in \{-1, 1\}$

## Abschätzungen für komplexe Ableitungen

Ist  $f$  auf einer Kreisscheibe mit Radius  $> r$  um  $z$  analytisch, so gilt

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)|.$$

## Beweis:

Integralformel für Ableitungen,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw,$$

für einen Kreis

$$C: w(t) = z + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

um  $z$  mit Radius  $r \implies$

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{r^{n+1} e^{(n+1)it}} \underbrace{ire^{it} dt}_{dw} \right| \\ &\leq \frac{n!}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})| dt \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)| \end{aligned}$$

## Beispiel:

illustriere die Abschätzung für

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad f^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-(n+1)}$$

auf einer Kreisscheibe  $C : |w - z| < r$  mit  $r < |z|$

Abschätzung mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel  $\rightsquigarrow$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)| = \frac{n!}{r^n} \frac{1}{|z| - r}$$

geringfügig schlechter als exakter Wert

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{|z|^{n+1}}$$

denn

$$\max_{0 < r < |z|} r^n (|z| - r) = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)(1 + 1/n)^n} \geq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)e}$$

(Schranke um den Faktor  $(n+1)e$  größer)

# Satz von Liouville

Eine analytische Funktion  $f$ , die auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt ist, d.h.

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = c < \infty,$$

ist konstant.



## Beweis:

Abschätzung für die komplexe Ableitung  $\implies$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{|w-z|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r} c$$

für einen Kreis um  $z$  mit Radius  $r$

Grenzwertbildung  $r \rightarrow \infty \implies$

$$f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

d.h.  $f$  ist konstant

# Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z^1 + a_0$$

mit Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  besitzt in  $\mathbb{C}$  mindestens eine Nullstelle  $z_1$ .

Mit Hilfe von Polynomdivision erhält man durch wiederholte Anwendung dieses Satzes die Faktorisierung

$$p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n),$$

d.h. die Existenz von genau  $n$  Nullstellen von  $p$  inklusive Vielfachheiten.

## Beweis:

Gegenannahme:  $p$  besitzt keine Nullstelle in  $\mathbb{C}$

$\implies z \mapsto 1/p(z)$  ist analytisch (kein Pol)

$|z| \geq c = \max(1, 2(|a_0| + \dots + |a_{n-1}|)) \implies$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|p(z)|} &\leq \frac{1}{|z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_0|} \\ &\stackrel{|z| \geq 1}{\leq} \frac{1}{|z|^n - (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)|z|^{n-1}} \\ &\leq \frac{1}{|z|^n - (|z|/2)|z|^{n-1}} = \frac{1}{|z|^n/2} \leq 2 \end{aligned}$$

$1/|p(z)|$  ist aus Stetigkeitsgründen auch für  $|z| \leq c$  beschränkt.

Satz von Liouville  $\implies 1/p$  konstant

Widerspruch

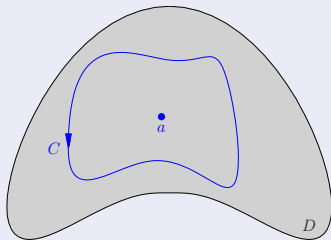
$\implies \exists$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  von  $p$

# Residuum

Für eine in einer punktierten Kreisscheibe  $D \setminus \{a\}$  analytische Funktion  $f$  definiert man das Residuum im Punkt  $a$  als

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

wobei  $C : t \mapsto a + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , ein entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis in  $D$  ist.



Hat  $f$  bei  $a$  eine Polstelle  $n$ -ter Ordnung, d.h.

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z)$$

mit einer in  $D$  analytischen Funktion  $g$ , so ist

$$\operatorname{Res}_a f = c_{-1}.$$

Dies gilt allgemeiner für eine in  $D$  absolut konvergente Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

d.h.  $\operatorname{Res}_a f = c_{-1}$  auch im Falle einer wesentlichen Singularität.

## Beweis:

(i) Unabhängigkeit vom gewählten Kreis  $C$ :  
zwei entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte Kreise

$$C_k : t \mapsto z + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

mit  $r_0 < r_1$  beranden einen Kreisring  $R$ :  $\partial R = C_1 - C_0$

Cauchys Theorem  $\implies$

$$0 = \int_{C_1 - C_0} f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz$$

d.h. die Unabhängigkeit vom gewählten Radius  $r$

(ii) Konsistenz der Definition für die Spezialfälle:

$(z - a)^n$ ,  $n \neq -1$ , besitzt die Stammfunktion  $(z - a)^{n+1}/(n + 1) \implies$

$$\int_C (z - a)^n dz = 0$$

Cauchys Theorem für eine analytische Funktion  $g \implies$

$$\int_C g(z) dz = 0$$

$\implies$

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{c_{-1}}{z - a} dz = c_{-1} \underbrace{n(C, a)}_{\text{Umlaufzahl}} = c_{-1}$$

sowohl für Polstellen als auch für wesentliche Singularitäten mit konvergenten Laurent-Entwicklungen

## Beispiel:

typische Fälle

- Rationale Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$$

Residuen an den Polstellen:  $\operatorname{Res}_0 f = -1$  und  $\operatorname{Res}_1 f = 1$

- Funktion mit einer wesentlicher Singularität:

$$f(z) = e^{1/z}$$

Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

Residuum:  $\operatorname{Res}_0 f = 1$



- Funktion mit expliziter Stammfunktion:

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^2}, \quad F(z) = \cos(1/z)$$

Integral über geschlossene Kurven null,

$$\int_C f \, dz = 0,$$

$$\implies \operatorname{Res}_0 f = 0$$

## Berechnung von Residuen

Für eine einfache Polstelle  $a$  einer Funktion  $f$  gilt

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$$

und für eine Polstelle  $n$ -ter Ordnung ist

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-a)^n f(z)) \right].$$

## Beweis:

(i) Einfache Polstelle:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \underbrace{g(z)}_{\text{analytisch}}, \quad \operatorname{Res}_a f = c_{-1}$$

Übereinstimmung mit

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (c_{-1} + (z-a)g(z)) = c_{-1}$$

(ii) Polstelle  $n$ -ter Ordnung:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \underbrace{g(z)}_{\text{analytisch}}, \quad \operatorname{Res}_a f = c_{-1}$$

alternative Formel für  $\operatorname{Res}_a f$

$$(d/dz)^{n-1} ((z-a)^n f(z)) = (d/dz)^{n-1} (\dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n g(z))$$

$\rightarrow (n-1)! c_{-1}$  für  $z \rightarrow a$ , d.h. Bilden des Grenzwertes liefert ebenfalls

## Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z}$$

Polstellen:

zweiter Ordnung bei  $z = 0$ , erster Ordnung bei  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

(i) Doppelte Polstelle:

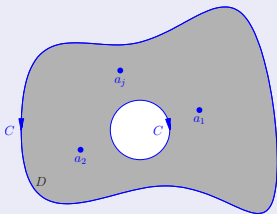
$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_0 f &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{d}{dz} \frac{z}{\sin z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z} \\ &\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - \cos z + z \sin z}{2 \cos z \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2 \cos z} = 0 \end{aligned}$$

(ii) Einfache Polstellen:

$$\operatorname{Res}_{k\pi} f = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z - k\pi}{z \sin z} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\sin z + z \cos z} = \frac{(-1)^k}{k\pi}$$

# Residuensatz

Sei  $D$  ein beschränktes Gebiet, dessen Rand sich aus entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten (Gebiet liegt „links“) stückweise stetig differenzierbaren Kurven  $C_k$  zusammensetzt.

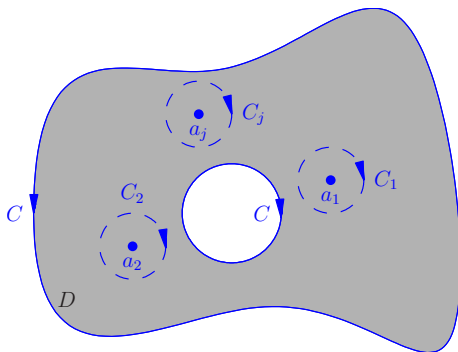


Dann gilt für eine in  $\bar{D}$  stetige und in  $D$  bis auf endlich viele Singularitäten  $a_j$  analytische Funktion  $f$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} f_{a_j}, \quad C = \sum_k C_k.$$

Beweis:

$C_j \subset D$ : im Uhrzeigersinn orientierter Kreis um  $a_j$



$f$  analytisch auf dem durch  $C + C_1 + \cdots + C_n$  berandeten Gebiet

Cauchys Theorem  $\implies$

$$0 = \int_{C+C_1+\dots+C_n} f(z) dz = \int_C f(z) dz + \sum_{j=1}^n \int_{\tilde{C}_j} f(z) dz$$

Definition des Residuums  $\implies$

$$\int_{\tilde{C}_j} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{a_j} f$$

(Minus-Zeichen aufgrund der Orientierung der Kreise)

Einsetzen in die Identität für  $\int_{C+C_1+\dots+C_n} \dots \rightsquigarrow$  behauptete Formel

## Beispiel:

illustriere den Residuensatz für

$$f(z) = \frac{1-z}{z^2+z^3} = \frac{1-z}{z^2(1+z)}$$

und  $C$  den entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Kreis um 0 mit Radius 2

(i)  $z = 0$ : Polstelle zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_0 f &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) \Big|_{z=0} = \left( \frac{d}{dz} \left( \frac{1-z}{1+z} \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{2}{(1+z)^2} \Big|_{z=0} = -2 \end{aligned}$$

(ii)  $z = -1$ : einfache Polstelle

$$\operatorname{Res}_{-1} f = \lim_{z \rightarrow -1} (1+z)f(z) = \frac{1-z}{z^2} \Big|_{z=-1} = 2$$



Residuensatz  $\implies$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}_0 f + \operatorname{Res}_{-1} f) = 2\pi i (-2 + 2) = 0$$

# Residuenkalkül für trigonometrische Integranden

Ein Integral der Form

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t) dt$$

mit einer rationalen Funktion  $r$  kann durch die Substitution

$$z = e^{it}, \quad \cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), \quad dz = iz dt,$$

in das komplexe Kurvenintegral

$$\int_C f(z) dz, \quad f(z) = r \left( \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{1}{iz},$$

über den entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Einheitskreis  $C : |z| = 1$  überführt werden.

Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}_a f ,$$

d.h. das Integral ist das  $(2\pi i)$ -fache der Summe der Residuen von  $f$  an den Polstellen  $a$  im Inneren des Einheitskreises.

## Beispiel:

trigonometrisches Integral

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{c + \cos t} dt, \quad c \in (1, \infty)$$

Substitution

$$z = e^{it}, \quad dz = iz dt, \quad \cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

und Symmetrie des Integrals  $\rightsquigarrow$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{c + \cos t} dt = \int_C \frac{1}{i} \frac{1}{z^2 + 2cz + 1} dz$$

mit  $C$  dem entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Einheitskreis

## Bestimmung der Nullstellen des Nenners und Faktorisierung $\rightsquigarrow$

$$I = \int_C \frac{1}{i} \frac{1}{(z + c - \sqrt{c^2 - 1})(z + c + \sqrt{c^2 - 1})} dz = \int_C f(z) dz$$

Polstelle im Inneren des Einheitskreises:  $a = -c + \sqrt{c^2 - 1}$   
( $-c - \sqrt{c^2 - 1} < -1 - 0$ , außerhalb)

Residuum

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = \frac{1}{i(z + c + \sqrt{c^2 - 1})} \Big|_{z = -c + \sqrt{c^2 - 1}} = \frac{1}{2i\sqrt{c^2 - 1}}$$

Residuensatz  $\implies$

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_a f = \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}$$

## Residuenkalkül für rationale Integranden

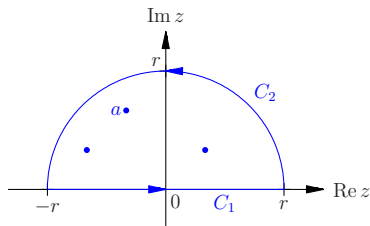
Für eine rationale Funktion  $f$  ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad um mindestens 2 kleiner als der Nennergrad gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a f,$$

wobei die Residuen an allen Polstellen in der oberen Halbebene summiert werden.

Alternativ kann man über die Polstellen in der unteren Halbebene summieren. Dabei ändert sich aufgrund der entgegengesetzten Orientierung das Vorzeichen der Summe. Dies zeigt insbesondere, dass die Summe aller Residuen von  $f$  null ist.

## Beweis:



$r$  so groß, dass alle Polstellen  $a$  mit  $\text{Im } a > 0$  von  $f$  im Halbkreis  $C = C_1 + C_2$  liegen

Residuensatz  $\implies$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}_a f$$

zeige:  $|\int_{C_2} f| \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$

Halbkreis

$$C_2: z(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Zählergrad von  $f$  um mindestens 2 kleiner als der Nennergrad  $\implies$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^2 f(z) = M \quad (|M| < \infty)$$

und mit  $\tilde{M} = 2|M| + 1$  gilt

$$|f(z)| \leq \frac{\tilde{M}}{|z|^2}, \quad |z| \geq r_0$$

für hinreichend großes  $r_0$

$\rightsquigarrow$  Abschätzung

$$\left| \int_{C_2} f \right| = \left| \int_0^\pi \underbrace{f(re^{it})}_z ire^{it} dt \right| \leq \pi \frac{\tilde{M}}{r^2} r \rightarrow 0$$



## Beispiel:

Integral über  $\mathbb{R}$  von

$$f(z) = \frac{1}{1+z^6}$$

einfache Polstellen:  $a_k = e^{i(\pi/6+2\pi k/6)}$ ,  $k = 0, \dots, 5$

$a_0, a_1, a_2$  in der oberen Halbebene mit Residuen

$$\operatorname{Res} f = \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{(z - a_k)}{1 + z^6} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{1}{6z^5} = \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{z}{6z^6} = -\frac{a_k}{6}$$

$$(z^6 = -1)$$

Residuensatz  $\implies$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx &= 2\pi i \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res}_{a_k} f = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ &= 2\pi/3 \end{aligned}$$

## Beispiel:

Integral über  $\mathbb{R}$  von

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^n} = \frac{1}{(z - i)^n(z + i)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Polstelle in der oberen Halbebene:  $a = i$ ,  $n$ -fach

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i f &= \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-i)^n f(z)) \Big|_{z=i} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(z+i)^{2n-1}} \Big|_{z=i} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1}i}{2^{2n-1}i^{2n}} = -i \binom{2n-2}{n-1} 2^{1-2n} \end{aligned}$$

Residuensatz  $\implies$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_i f = \pi \binom{2n-2}{n-1} 2^{2-2n}$$

## Residuenkalkül für transzendente Integranden

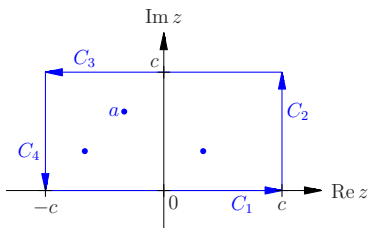
Für eine rationale Funktion  $f$  ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad kleiner als der Nennergrad gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_{z=a} \left( f(z) e^{i\lambda z} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Für  $\lambda < 0$  wird entsprechend die negative Summe aller Residuen in der unteren Halbebene gebildet.

## Beweis:

geschlossener Integrationsweg



$c$  so groß, dass alle Polstellen  $a$  von  $f e^{i\lambda z}$  mit  $\text{Im } a > 0$  im Rechteck  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  liegen

Residuensatz  $\implies$

$$\int_C f(z) e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}_{z=a} \left( f(z) e^{i\lambda z} \right)$$

zeige:  $I_k = \left| \int_{C_k} \dots \right| \rightarrow 0, c \rightarrow \infty$ , für  $k = 2, 3, 4$

Zählergrad kleiner als der Nennergrad  $\implies$

$$\exists M > 0 : |f(z)| \leq \frac{M}{|z|}, \quad |z| \geq r$$

(i) Weg  $C_2$ :  $y \mapsto z = c + iy, 0 \leq y \leq c, dz = i dy$

$$I_2 = \left| \int_0^c f(c + iy) e^{i\lambda(c+iy)} i dy \right| \leq \frac{M}{c} \int_0^\infty e^{-\lambda y} dy = \frac{M}{c\lambda}$$

für  $c \geq r$

analoge Abschätzung für  $I_4 \rightsquigarrow I_2, I_4 \rightarrow 0$  für  $c \rightarrow \infty$

(ii)  $C_3$ :  $x \mapsto z = ic + x, c \geq x \geq -c, dz = dx$

$$I_3 = \left| \int_c^{-c} f(ic + x) e^{i\lambda(ic+x)} dx \right| \leq \frac{M}{c} e^{-\lambda c} \left| \int_c^{-c} dx \right| = 2M e^{-\lambda c}$$

für  $c \geq r$

$$\implies \lim_{c \rightarrow \infty} I_3 = 0$$

## Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

Polstelle in der oberen Halbebene:  $a_1 = i$

Residuum

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{i+z} = \frac{1}{2ie}$$

Residuensatz  $\implies$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \frac{2\pi i}{2ie} = \frac{\pi}{e}$$

## Komplexes Taylor-Polynom

Eine in einem Gebiet  $D$  analytische Funktion  $f$  wird durch das Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k$$

in jedem Punkt  $a \in D$  mit der Ordnung  $n + 1$  approximiert:

$$|f(z) - p_n(z)| = O(|z - a|^{n+1}), \quad z \rightarrow a.$$



Das Restglied besitzt die Integraldarstellung

$$f(z) - p_n(z) = \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1},$$

mit einem entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis  $C$  in  $D$  um  $a$ , der  $z$  enthält.

## Beweis:

(i) Integralformel:

Beweis durch Induktion bzgl.  $n$

- $n = 0$ :

Cauchys Integralformel  $\implies$

$$\begin{aligned} f(z) - p_0(z) &= f(z) - f(a) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)} dw \end{aligned}$$

Umformung  $\rightsquigarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(w) \frac{(w-a) - (w-z)}{(w-a)(w-z)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)(z-a)}{(w-a)(w-z)} dw$$

- $n \rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 f(z) - p_{n+1}(z) &= f(z) - p_n(z) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (z-a)^{n+1} \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1} \\
 &\quad - \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+2}} dw \right) (z-a)^{n+1}
 \end{aligned}$$

aufgrund der Induktionsvoraussetzung und Cauchys Integralformel  
Umformung  $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \frac{(w-a) - (w-z)}{(w-a)(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1} = \\
 &\quad \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+2}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+2}
 \end{aligned}$$

(ii) Abschätzung:

$C$ : Kreis um  $a$  mit Radius  $r < \text{dist}(a, \partial D)$

Darstellung des Restglieds für  $|z - a| < r \implies$

$$\begin{aligned} |f(z) - p_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw (z-a)^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} (2\pi r) \frac{|z-a|^{n+1}}{r^{n+1}(r-|z-a|)} \max_{|w-a|=r} |f(w)| \\ &= O(|z-a|^{n+1}) \end{aligned}$$

## Komplexe Taylor-Reihe

Eine in einem Gebiet  $D$  analytische Funktion  $f$  lässt sich in jedem Punkt  $a \in D$  in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n .$$

Die Reihe konvergiert absolut für

$$|z - a| < r = \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| f^{(n)}(a)/n! \right|^{1/n} \right)^{-1} .$$

Der Konvergenzradius  $r$  ist gleich dem Abstand des Entwicklungspunktes  $a$  zur nächsten Singularität von  $f$ , d.h. zum Rand des Analytizitätsgebietes.

## Beweis:

(i) Konvergenz für  $|z - a| < d = \text{dist}(a, \partial D)$ :

$C$ : entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um  $a$  mit Radius  $s < d$

Cauchys Integralformel

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

$\rightsquigarrow$  Abschätzung

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} (2\pi s) \frac{c}{s^{n+1}} = c s^{-n}, \quad c = \max_{w \in C} |f(w)|$$

Betrag des  $n$ -ten Summanden der Taylor-Reihe  $\leq c(|z - a|/s)^n$

$\rightsquigarrow$  majorisierende geometrische Reihe für  $|z - a| < s$

$s < d$  beliebig  $\implies$

Konvergenz auf der größten in  $D$  enthaltenen offenen Kreisscheibe

(ii) Konvergenzradius:

absolute Konvergenz für  $|z - a| > d$

$\implies$  größeres Analytizitätsgebiet (Potenzreihe definiert eine analytische Funktion)

$\implies$  Widerspruch, d.h. Konvergenzradius  $d = \text{dist}(a, \partial D)$  ist maximal  
eindeutige Charakterisierung des Konvergenzradius

$\implies$  Äquivalenz zur Formel aus der Theorie reeller Reihen, d.h.  $d = r$

## Beispiel:

Taylor-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

(i) Pol bei 0:

$$\frac{1}{z} = \frac{-1}{-a - (z-a)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{-a}} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(-a)^n}$$

Konvergenz für  $|z-a| < |a|$

(ii) Pol bei 1:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-a - (z-a)} = \frac{1}{a-1} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{1-a}} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^n}$$

Konvergenz für  $|z-a| < |1-a|$

in beiden Fällen:  $|z-a|$  kleiner als der Abstand zur Singularität



Taylor-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{(1-a)^{n+1}} - \frac{-1}{(-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n$$

Konvergenzradius  $r$ : Abstand des Entwicklungspunktes  $a$  zur näheren Polstelle  $z = 0$  oder  $z = 1$ , d.h.

$$r = \min(|a|, |1-a|)$$

# Methoden der Taylor-Entwicklung

Einige Methoden der Taylor-Entwicklung sind:

- direkte Berechnung der Ableitungen im Entwicklungspunkt
- gliedweise Differentiation oder Integration
- Koeffizientenvergleich
- Produktbildung durch gliedweise Multiplikation
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument

## Beispiel:

Taylor-Reihe um  $z = 0$  der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + pz + q}$$

Ansatz

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + pz + q} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Koeffizientenvergleich  $\rightsquigarrow$

$$1 = c_0 q + (c_1 q + c_0 p)z + (c_2 q + c_1 p + c_0)z^2 + (c_3 q + c_2 p + c_1)z^3 + \dots$$

## sukzessive Berechnung der Koeffizienten

$$c_0 = \frac{1}{q}$$

$$c_1 = -\frac{p}{q^2}$$

$$c_2 = -\frac{c_0 + c_1 p}{q} = -\frac{1}{q^2} + \frac{p^2}{q^3}$$

...

allgemein:

$$(c_n q + c_{n-1} p + c_{n-2}) z^n = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_n = -\frac{c_{n-2} + c_{n-1} p}{q}$$

## Beispiel:

Taylor-Entwicklung im Punkte  $z = 0$  der Funktion

$$f(z) = \operatorname{Ln} \frac{a+z}{a-z}$$

Ableitung

$$f'(z) = \frac{a-z}{a+z} \frac{d}{dz} \frac{a+z}{a-z} = \frac{2}{a} \frac{1}{1-(z/a)^2} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{2n}$$

gliedweise Integration  $\rightsquigarrow$

$$f(z) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1/2} \left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1}$$

Integrationskonstante:  $f(0) = 0 \implies c = 0$

# Laurent-Reihe

Eine in einem Kreisring  $D : r_1 < |z - a| < r_2$  analytische Funktion  $f$  kann in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

entwickelt werden, die in  $D$  absolut konvergiert.

Die Koeffizienten besitzen die Integraldarstellung

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw,$$

wobei  $C \subset D$  ein beliebiger entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um  $a$  ist.

Die Laurent-Reihe entspricht einer Zerlegung

$$f(z) = f_1(z - a) + f_2(1/(z - a))$$

von  $f$  in zwei analytische Funktionen  $f_k$ , die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind.

Die Konvergenzgebiete von  $f_1$  und  $f_2$  sind

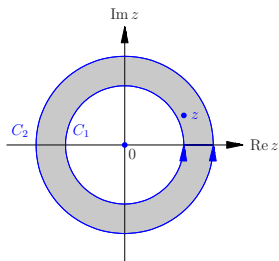
$$D_1 : |z - a| < r_2, \quad D_2 : |z - a| > r_1$$

und man erhält  $D = D_1 \cap D_2$  als Konvergenzgebiet der Laurent-Reihe.

## Beweis:

o.B.d.A.  $a = 0$

$D$ : Kreisring mit Rand  $C_2 - C_1$ , der  $z$  einschließt



Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \right)$$



- Erstes Integral:  $|z| < |w|$  für  $w \in C_2 \rightsquigarrow$  Entwicklung

$$\frac{1}{w} \frac{1}{1 - z/w} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \dots$$

- Zweites Integral:  $|z| > |w|$  für  $w \in C_1 \rightsquigarrow$  Entwicklung

$$-\frac{1}{z} \frac{1}{1 - w/z} = -\frac{1}{z} - \frac{w}{z^2} - \frac{w^2}{z^3} - \dots$$

Einsetzen  $\rightsquigarrow$  Formel für die Laurent-Koeffizienten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw z^n \right)$$

( $f(w)/w^{n+1}$  in  $D$  analytisch  $\rightsquigarrow$  Verschiebung des Integrationswegs möglich)

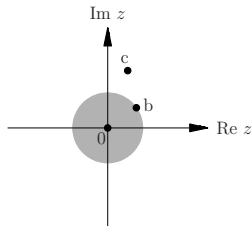
eindeutige Aufspaltung in zwei analytische Funktionen  $f_k$  aufgrund der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung

## Beispiel:

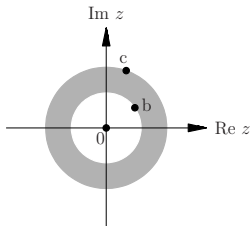
verschiedene Laurent-Entwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{b-c}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c}$$

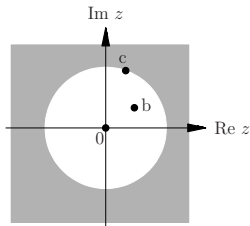
mit  $|b| < |c|$  um  $a = 0$



$$|z| < |b|$$



$$|b| < |z| < |c|$$



$$|c| < |z|$$

(i)  $|z| < |b|$ :

$$f(z) = -\frac{1}{b} \frac{1}{1 - z/b} + \frac{1}{c} \frac{1}{1 - z/c} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{c^{n+1}}$$

Konvergenz der Reihen für  $|z| < |b|$  bzw.  $|z| < |c|$

$\rightsquigarrow$  Taylor-Reihe in der Kreisscheibe  $D : |z| < \min(|b|, |c|)$

$$f(z) = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)z + \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3}\right)z^2 + \dots$$

(ii)  $|b| < |z| < |c|$ :

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - b/z} + \frac{1}{c} \frac{1}{1 - z/c} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{c^{n+1}}$$

Konvergenz der Reihen für  $|b| < |z|$  bzw.  $|z| < |c|$

$\rightsquigarrow$  Laurent-Reihe in dem Kreisring  $|b| < |z| < |c|$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{b^2}{z^3} + \cdots + \frac{1}{c} + \frac{z}{c^2} + \frac{z^2}{c^3} + \cdots$$

(iii)  $|c| < |z|$ :

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - b/z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - c/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{z^{n+1}}$$

Konvergenz der Reihen für  $|b| < |z|$  bzw.  $|c| < |z|$

$\rightsquigarrow$  Laurent-Reihe in dem Kreisring  $|z| > \max(|b|, |c|)$

$$f(z) = \frac{b - c}{z^2} + \frac{b^2 - c^2}{z^3} + \frac{b^3 - c^3}{z^4} + \dots$$

## Beispiel:

Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Konvergenz für  $|z| = 1 \rightsquigarrow$  äquivalente Fourier-Reihe

$$g(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad z = e^{it}$$

- Berechnung der Koeffizienten als Kurvenintegral:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

C: positiv orientierter Einheitskreis

- Berechnung als trigonometrisches Integral:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{i(n+1)t}} ie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)e^{-int} dt$$

$$(z = e^{it}, dz = iz dt)$$

# Methoden der Laurent-Entwicklung

Einige Methoden der Laurent-Entwicklung sind:

- direkte Berechnung der Koeffizienten
- gliedweise Differentiation oder Integration bekannter Reihen
- Koeffizientenvergleich
- Summe oder Produkte bekannter Reihen
- Substitution  $z \rightarrow \frac{1}{z-a}$  in bekannten Taylor-Reihen
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument



## Beispiel:

Laurent-Entwicklung der Arcustangens-Funktion durch gliedweise Integration der Reihendarstellung der Ableitung

$$\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$$

- $|z| < 1$ :

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n$$

↪ Taylor-Entwicklung

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

$$(\arctan(0) = 0)$$

- $|z| > 1$ :

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+1/z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^{-n}$$

↪ Laurent-Entwicklung

$$\arctan z = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{-2n-1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} - \dots$$

(Integrationskonstante  $\pi/2$  durch Vergleich der Werte bei  $z = \infty$ )

## Beispiel:

geometrische Reihen

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1$$

Differenzieren  $\rightsquigarrow$  Taylor- bzw. Laurent-Reihen

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{z^{n+2}} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \dots, \quad |z| > 1$$

weiteres Differenzieren  $\rightsquigarrow$  Reihen von  $(1-z)^{-m}$

# Regulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

ist bei  $z = a$  regulär, wenn  $q/r$  und  $p/r$  in einer Umgebung von  $a$  analytisch sind.

In einem regulären Punkt  $a$  existiert zu beliebigen Werten  $u(a) = u_0$ ,  $u'(a) = u_1$  eine eindeutige, in einer Umgebung von  $a$  analytische Lösung  $u$ . Insbesondere existieren zwei linear unabhängige Lösungen zu den Werten

$$u(a) = 0, \quad u'(a) = 1$$

und

$$u(a) = 1, \quad u'(a) = 0.$$

## Beweis:

Division durch  $r \rightsquigarrow r = 1$ , Verschiebung  $\rightsquigarrow$  o.B.d.A.  $a = 0$

Entwicklungen der Koeffizienten

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \dots, \quad q(z) = q_0 + q_1 z + \dots$$

mit  $|p_j|, |q_j| \leq cs^j$  für ein  $s > 0$

formaler Ansatz

$$u(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$$

$$u'(z) = u_1 + 2u_2 z + \dots + (n+1)u_{n+1} z^n + \dots$$

Koeffizientenvergleich der Entwicklungen

$$p(z)u(z) = p_0 u_0 + (p_1 u_0 + p_0 u_1)z + \dots + (p_n u_0 + \dots + p_0 u_n)z^n + \dots$$

$$q(z)u'(z) = q_0 u_1 + (q_1 u_1 + 2q_0 u_2)z + \dots$$

$$+ (q_n u_1 + 2q_{n-1} u_2 + \dots + (n+1)q_0 u_{n+1})z^n + \dots$$

$$u''(z) = 2u_2 + 6u_3 z + \dots + (n+2)(n+1)u_{n+2} z^n + \dots$$

↪ Rekursion für die Koeffizienten von  $u$ :

$$\begin{aligned}2u_2 &= -q_0 u_1 - p_0 u_0 \\6u_3 &= -(q_1 u_1 + 2q_0 u_2) - (p_1 u_0 + p_0 u_1) \\&\vdots\end{aligned}$$

allgemein

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)u_{n+2} &= -(q_n u_1 + \cdots + (n+1)q_0 u_{n+1}) \\&\quad -(p_n u_0 + \cdots + p_0 u_n)\end{aligned}$$

Koeffizienten sukzessive aus  $u_0 = u(0)$  und  $u_1 = u'(0)$  eindeutig berechenbar

zeige induktiv

$$|u_j| \leq dt^j$$

( $\implies$  Analytizität mit Konvergenzradius  $\geq 1/t$ )

- Induktionsanfang: Wahl von  $d \rightsquigarrow$

$$|u_0| \leq d, \quad |u_1| \leq dt \quad \checkmark$$

- Induktionsschritt: Rekursion  $\implies$

$$|u_{n+2}| \leq \frac{cd}{(n+1)(n+2)} (s^n t^1 + \dots + (n+1)s^0 t^{n+1} + s^n t^0 + \dots + s^0 t^n)$$

$$t \geq s, \quad 1 + \dots + (n+1) = (n+1)(n+2)/2 \quad \rightsquigarrow$$

$$|u_{n+2}| \leq cd \left( \frac{t^{n+1}}{2} + \frac{t^n}{(n+2)} \right) \leq cd \left( \frac{1}{2t} + \frac{1}{t^2} \right) t^{n+2}$$

$$\leq dt^{n+2}, \text{ falls}$$

$$c \left( \frac{1}{2t} + \frac{1}{t^2} \right) \leq 1$$

erfüllt für hinreichend großes  $t$

Konvergenzradius u.U. zu klein

optimales  $1/t$ : Minimum der Konvergenzradien von  $p$  und  $q$

## Beispiel:

(i) Legendre-Differentialgleichung:

$$(1 - z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \alpha(\alpha + 1)u(z) = 0$$

$$(q/r)(z) = -(2z)/(1 - z^2), (p/r)(z) = \alpha(\alpha + 1)/(1 - z^2) \implies$$

Regularität für  $z \neq \pm 1$

(ii) Bessel-Differentialgleichung:

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0$$

$$(q/r)(z) = 1/z, (p/r)(z) = (z^2 - \alpha^2)/z^2 \implies$$

Regularität für  $z \neq 0$



## Beispiel:

Legendre-Differentialgleichung

$$(1 - z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \alpha(\alpha + 1)u(z) = 0$$

Ansatz

$$u(z) = u_0 + u_1z + \dots$$

Koeffizientenvergleich

$$z^n : (n + 2)(n + 1)u_{n+2} - n(n - 1)u_n - 2nu_n + \alpha(\alpha + 1)u_n = 0$$

↪ Rekursion

$$u_{n+2} = \frac{n(n + 1) - \alpha(\alpha + 1)}{(n + 1)(n + 2)} u_n = -\frac{(\alpha - n)(\alpha + n + 1)}{(n + 1)(n + 2)} u_n$$

$u(0) = 1, u'(0) = 0 \rightsquigarrow$  ungerade Koeffizienten null und

$$u_0 = 1, \quad u_2 = -\frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 \cdot 2}, \quad u_4 = \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

allgemein

$$u_{2n} = (-1)^n \frac{\alpha \cdots (\alpha - 2n + 2)(\alpha + 1) \cdots (\alpha + 2n - 1)}{(2n)!}.$$

$\alpha \geq 0$  gerade oder  $\alpha < 0$  ungerade  $\rightsquigarrow$  Polynom

$$\alpha = 0 \text{ (oder } \alpha = -1) \rightarrow u(z) = 1$$

$$\alpha = 2 \text{ (oder } \alpha = -3) \rightarrow u(z) = 1 - 3z^2$$

$$\alpha = 4 \text{ (oder } \alpha = -5) \rightarrow u(z) = 1 - 10z^2 + \frac{35}{3}z^4$$

$u(0) = 0, u'(0) = 1 \rightsquigarrow$  gerade Koeffizienten null und

$$u_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha - 1) \cdots (\alpha - 2n + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + 2n)}{(2n + 1)!}$$

$\alpha > 0$  ungerade oder  $\alpha < 0$  gerade  $\rightsquigarrow$  Polynom

$$\alpha = 1 \text{ (oder } \alpha = -2) \rightarrow u(z) = z$$

$$\alpha = 3 \text{ (oder } \alpha = -4) \rightarrow u(z) = z - \frac{5}{3}z^3$$

$$\alpha = 5 \text{ (oder } \alpha = -6) \rightarrow u(z) = z - \frac{14}{3}z^3 + \frac{21}{5}z^5$$

# Singulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

hat bei  $z = a$  einen regulären singulären Punkt, wenn  $q/r$  einen Pol höchstens erster und  $p/r$  einen Pol höchstens zweiter Ordnung bei  $z = a$  haben. In einem regulären singulären Punkt  $a$  wird das Verhalten der Lösungen  $u$  durch die charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$$

bestimmt, wobei  $q_0$  und  $p_0$  die führenden Koeffizienten von  $q/r$  bzw.  $p/r$  sind, d.h.

$$\frac{q(z)}{r(z)} = \frac{q_0 + q_1(z - a) + \dots}{z - a}, \quad \frac{p(z)}{r(z)} = \frac{p_0 + p_1(z - a) + \dots}{(z - a)^2}.$$

Ist die Differenz der Nullstellen  $\alpha, \beta$  von  $\varphi$  nicht ganzzahlig, so existieren zwei linear unabhängige Lösungen

$$(z - a)^\alpha v(z), \quad (z - a)^\beta w(z),$$

wobei  $v$  und  $w$  in einer Umgebung von  $a$  analytische Funktionen mit  $v(a), w(a) \neq 0$  sind.

Sonst existiert im Allgemeinen nur eine Lösung dieses Typs zu dem Exponenten  $\alpha$  mit dem größten Realteil. Eine zweite Lösung kann dann durch Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz

$$u(z) = c(z)(z - a)^\alpha v(z)$$

bestimmt werden.

## Beweis:

formale Rechtfertigung des Lösungstyps, o.B.d.A.  $a = 0$ ,  $r(z) = 1$

Ansatz

$$u(z) = z^\lambda(u_0 + u_1z + \dots)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung

$$u''(z) = \lambda(\lambda - 1)u_0z^{\lambda-2} + (\lambda + 1)\lambda u_1z^{\lambda-1} + \dots$$

$$\frac{1}{z}u'(z)q(z) = \left(\lambda u_0z^{\lambda-2} + (\lambda + 1)u_1z^{\lambda-1} + \dots\right)(q_0 + q_1z + \dots)$$

$$\frac{1}{z^2}u(z)p(z) = \left(u_0z^{\lambda-2} + u_1z^{\lambda-1} + \dots\right)(p_0 + p_1z + \dots)$$

Vergleich der Koeffizienten von  $z^{\lambda-2} \rightsquigarrow$  charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda)u_0 = 0$$

Nullstellen  $\lambda$  von  $\varphi \rightsquigarrow$  nicht triviale Lösungen ( $u_0 \neq 0$ )  
Vergleich der Koeffizienten von  $z^{\lambda-2+k} \rightsquigarrow$  Rekursion

$$\varphi(\lambda + k)u_k = \psi(u_0, \dots, u_{k-1}), \quad k > 0,$$

mit

$$\begin{aligned} \psi(u_0, \dots, u_{k-1}) = & -(\lambda q_k u_0 + (\lambda + 1)q_{k-1}u_1 + \dots + (\lambda + k - 1)q_1 u_{k-1}) \\ & - (p_k u_0 + p_{k-1}u_1 + \dots + p_1 u_{k-1}) \end{aligned}$$

$q_\nu u_{k-\nu}, p_\nu u_{k-\nu}$ : Summe der Indizes =  $k \implies$  Koeffizient von  
 $z^\nu z^{k-\nu+\lambda-2} = z^{\lambda-2+k}$

Koeffizienten sukzessive bestimmbar, falls  $\varphi(\lambda + k) \neq 0 \forall k$

Bei ganzzahliger Differenz der Nullstellen  $\alpha, \beta$  von  $\varphi$ ,

$$\alpha = \beta + m \text{ mit } m \in \mathbb{N}$$

ist dies nur für den Exponenten  $\alpha$  mit größerem Realteil möglich.

Für den anderen Exponenten  $\beta$  ist die Rekursionsgleichung

$$\varphi(\beta + m)u_m = \psi(u_0, \dots, u_{m-1})$$

nur erfüllbar, falls die rechte Seite ebenfalls null ist.

## Beispiel:

Euler-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + qz u'(z) + p u(z) = 0$$

$z = 0$ : regulärer singulärer Punkt

Ansatz

$$u(z) = z^\lambda$$

Einsetzen  $\rightsquigarrow$  charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q\lambda + p = \lambda^2 + (q - 1)\lambda + p = 0$$

drei qualitativ verschiedene Fälle je nach Typ der Nullstellung von  $\varphi$



(i) Verschiedene Exponenten  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :

z.B.  $q = 0$ ,  $p = -6$ , d.h.

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3$$

Lösung

$$u(z) = c_1 \frac{1}{z^2} + c_2 z^3$$

Probe:

$$z^2 u'' - 6u = z^2 (c_1 (6/z^4) + c_2 (6z)) - 6 (c_1/z^2 + c_2 z^3) \quad \checkmark$$

(ii) Ein Exponent  $\lambda_1 = \lambda_2$ :

z.B.  $q = -1$  und  $p = 1$ , d.h.  $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$  mit der Nullstelle  $\lambda = 1$  und der Lösung

$$u(z) = c z$$

zweite Lösung durch Variation der Konstanten: Ansatz  $u(z) = c(z)z \rightsquigarrow$

$$z^2(c z)'' - z(c z)' + c z = 0$$

und nach Vereinfachung

$$0 = c'' z + c' = (c' z)'$$

mit der Lösung  $c(z) = c_1 + c_2 \operatorname{Ln} z$  d.h.

$$u(z) = (c_1 + c_2 \operatorname{Ln} z) z$$

(iii) Komplex konjugierte Exponenten:

z.B.  $q = 0$ ,  $p = 5/4$ , d.h.  $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 5/4$  mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i$$

Lösung

$$u(z) = c_1 z^{1/2+i} + c_2 z^{1/2-i} = \sqrt{z} (c_1 z^i + c_2 z^{-i})$$

reelle Lösung für reelles  $z > 0$  mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre:

$$z^{\pm i} = e^{\pm i \operatorname{Ln} z} = \cos(\operatorname{Ln} z) \pm i \sin(\operatorname{Ln} z)$$

$c_1 = c_2 = 1/2$  bzw.  $c_1 = -c_2 = 1/(2i) \rightsquigarrow$  linear unabhängige  
Lösungen

$$\sqrt{z} \cos(\operatorname{Ln} z), \quad \sqrt{z} \sin(\operatorname{Ln} z)$$

# Bessel-Differentialgleichung

Die Bessel-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0$$

besitzt für  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  die als Bessel-Funktion bezeichneten, linear unabhängigen Lösungen

$$J_{\pm\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

Für  $\alpha \in \mathbb{Z}$  existiert eine Lösung mit der angegebenen Reihendarstellung nur für den positiven Index. Die zweite linear unabhängige Lösung ist in diesem Fall eine sogenannte Bessel-Funktion zweiter Art.

Einige spezielle Bessel-Funktionen sind

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

und

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}.$$

## Beweis:

$z = 0$ : regulärer singulärer Punkt  
charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \alpha^2 = \lambda^2 - \alpha^2 = 0$$

$\rightsquigarrow$  Exponenten  $\lambda = \pm\alpha$

Ansatz

$$u(z) = z^\lambda(u_0 + u_1z + \dots)$$

Vergleich der Koeffizienten von  $z^{\lambda+n}$  in der Differentialgleichung  $\rightsquigarrow$

$$(\lambda + n)(\lambda + n - 1)u_n + (\lambda + n)u_n + u_{n-2} - \alpha^2u_n = 0$$

d.h. die Rekursion

$$\left( (\lambda + n)^2 - \alpha^2 \right) u_n + u_{n-2} = 0$$

Rekursion für Exponenten  $\pm\alpha \notin \mathbb{Z}$ ,

$$u_n = \frac{-u_{n-2}}{n(\pm 2\alpha + n)}, \quad n = 2, 4, \dots$$

$\rightsquigarrow$

$$u_2 = -\frac{u_0}{2 \cdot 2(\pm\alpha + 1)}, \quad u_4 = \frac{u_0}{2 \cdot 4 \cdot 2(\pm\alpha + 1) \cdot 2(\pm\alpha + 2)}$$

explizite Formel für die Koeffizienten

$$u_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(\pm\alpha + 1)}{2^n n! 2^n \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} u_0$$

$u_{2n+1} = 0$  und

$$u_0 = \frac{1}{2^{\pm\alpha} \Gamma(\pm\alpha + 1)}$$

$\rightsquigarrow$  behauptete Reihenentwicklung

$-\alpha \in \mathbb{N}$ : Rekursion nicht durchführbar

$\rightsquigarrow$  Lösung anderen Typs

spezielle Darstellungen, z.B.

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{z}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2} + n + 1\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} + n + 1\right) &= \left[ \left(\frac{1}{2} + n\right) \left(\frac{1}{2} + n - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right) \right] \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= [2^{-n-1} (2n+1)(2n-1)\cdots 1] \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

sowie

$$n! 2^{2n} = (2n)(2n-2)\cdots 2 \cdot 2^n$$

↪

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{z}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}$$



# Hypergeometrische Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0$$

besitzt bei  $z = 0, 1, \infty$  reguläre Singularitäten.

Für  $-c \notin \mathbb{N}_0$  existiert eine analytische Lösung, die sogenannte hypergeometrische Funktion

$$u(z) = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n$$

mit  $(t)_0 = 1$  und  $(t)_n = t(t+1) \cdots (t+n-1)$  für  $n \geq 1$ .

## Beweis:

Division durch  $z(1 - z) \rightsquigarrow$

$$u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

mit (nach Umformung)

$$q(z) = \frac{(c - cz) + (c - a - b - 1)z}{z(1 - z)} = \frac{c}{z} + \frac{1 + a + b - c}{z - 1}$$

$$p(z) = \frac{ab}{z(z - 1)}$$

reguläre singuläre Punkte:  $z = 0, 1$

Transformation  $t = 1/z$ ,  $dt/dz = -1/z^2 = -t^2$  und  $u(z) = \tilde{u}(t)$ :

$$\begin{aligned}u' &= \tilde{u}' \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \tilde{u}' \\u'' &= \left( \frac{d}{dt} u' \right) \left( \frac{dt}{dz} \right) = (-2t \tilde{u}' - t^2 \tilde{u}'') (-t^2) \\ &= 2t^3 \tilde{u}' + t^4 \tilde{u}''\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Division durch  $t^4 \rightsquigarrow$

$$\tilde{u}'' + \tilde{q} \tilde{u}' + \tilde{p} \tilde{u} = 0$$

mit

$$\tilde{q}(t) = \frac{2}{t} - \frac{ct + \frac{(1+a+b-c)t}{1-t}}{t^2} = \frac{2-c}{t} - \frac{1+a+b-c}{t(1-t)}$$

$$\tilde{p}(t) = \frac{\frac{abt^2}{1-t}}{t^4} = \frac{ab}{t^2(1-t)}$$

$\rightsquigarrow z = \infty$  ebenfalls regulärer singulärer Punkt

Ansatz

$$u(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

Vergleich der Koeffizienten von  $z^n$  in der Differentialgleichung  $\rightsquigarrow$

$$-n(n-1)u_n + (n+1)nu_{n+1} + c(n+1)u_{n+1} - n(a+b+1)u_n - abu_n = 0$$

$\rightsquigarrow$  Rekursion

$$u_{n+1} = \frac{n^2 - n + na + nb + n + ab}{(n+c)(n+1)} u_n = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} u_n$$

$$u_0 = 1 \implies$$

$$u_1 = \frac{ab}{c \cdot 1}, \quad u_2 = \frac{(a+1)(b+1)ab}{(c+1) \cdot 2 \cdot c \cdot 1}$$

und

$$u_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n}$$