Hypergeometrische Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0$$

besitzt bei $z = 0, 1, \infty$ reguläre Singularitäten.

Für $-c \notin \mathbb{N}_0$ existiert eine analytische Lösung, die sogenannte hypergeometrische Funktion

$$u(z) = F(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n$$

mit $(t)_0 = 1$ und $(t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$ für $n \geq 1$.

Beweis:

Division durch $z(1-z)$ $\rightsquigarrow$

$$u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

mit (nach Umformung)

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{(c - cz) + (c - a - b - 1)z}{z(1-z)} = \frac{c}{z} + \frac{1 + a + b - c}{z - 1} \\ p(z) &= \frac{ab}{z(z-1)} \end{aligned}$$

reguläre singuläre Punkte: $z = 0, 1$

Transformation $t = 1/z$, $dt/dz = -1/z^2 = -t^2$ und $u(z) = \tilde{u}(t)$:

$$\begin{aligned} u' &= \tilde{u}' \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \tilde{u}' \\ u'' &= \left(\frac{d}{dt} u'\right)\left(\frac{dt}{dz}\right) = \left(-2t\tilde{u}' - t^2 \tilde{u}''\right)\left(-t^2\right) \\ &= 2t^3 \tilde{u}' + t^4 \tilde{u}'' \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Division durch t^4 $\quad\rightsquigarrow$

$$\tilde{u}'' + \tilde{q}\tilde{u}' + \tilde{p}\tilde{u} = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t) &= \frac{2}{t} - \frac{ct + \frac{(1+a+b-c)t}{1-t}}{t^2} = \frac{2-c}{t} - \frac{1+a+b-c}{t(1-t)} \\ \tilde{p}(t) &= \frac{\frac{abt^2}{1-t}}{t^4} = \frac{ab}{t^2(1-t)} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad z = \infty$ ebenfalls regulärer singulärer Punkt

Ansatz

$$u(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots$$

Vergleich der Koeffizienten von z^n in der Differentialgleichung $\leadsto$

$$-n(n-1)u_n + (n+1)nu_{n+1} + c(n+1)u_{n+1} - n(a+b+1)u_n - abu_n = 0$$

$\leadsto$ Rekursion

$$u_{n+1} = \frac{n^2 - n + na + nb + n + ab}{(n+c)(n+1)} u_n = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} u_n$$

$u_0 = 1 \implies$

$$u_1 = \frac{ab}{c \cdot 1}, \quad u_2 = \frac{(a+1)(b+1)ab}{(c+1) \cdot 2 \cdot c \cdot 1}$$

und

$$u_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n}$$