Hauptsatz über konforme Abbildungen

Jedes einfach zusammenhängende, echte Teilgebiet der komplexen Ebene kann durch eine konforme Abbildung f auf die Einheitskreisscheibe abgebildet werden.
Für einen beliebigen Punkt $z_0 \in D$ kann die Abbildung durch die Bedingungen

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0$$

eindeutig festgelegt werden.

Beispiel:

konforme Abbildung der Halbkreisscheibe auf das Innere des Einheitskreises

$$D: \; |z| < 1, \, \operatorname{Re} z > 0 \quad \to \quad K: \; |w| < 1$$

Konstruktion mit mehreren Teilabbildungen

- Möbius-Transformation:

  $$\xi = \frac{z + \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}$$

  $-\mathrm{i}, 1, \mathrm{i} \mapsto 0, 1, \infty$
  $\implies$ Halbkreis $\to \mathbb{R}_+$
  imaginäre Achse invariant, $-\mathrm{i}, \mathrm{i} \mapsto 0, \infty$
  $\implies$ Segment zwischen $-\mathrm{i}$ und i $\to$ positive imaginäre Achse
  Vereinigung der Teilränder $\rightsquigarrow$ korrekte Abbildung von ∂D
- Quadrieren:

  $$\eta = \xi^2$$

  erster Quadrant $\to$ obere Halbebene H

- Möbius-Transformation:

$$w = \frac{\mathrm{i} - \eta}{\mathrm{i} + \eta}$$

$$0, 1, \infty \to 1, \mathrm{i}, -1 \qquad \Longrightarrow \qquad H \to K$$

Gesamtabbildung

$$w = \frac{\mathrm{i} - \left(\frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}\right)^2}{\mathrm{i} + \left(\frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}\right)^2} = \cdots = \frac{-\mathrm{i}(z^2 + 2z - 1)}{z^2 - 2z - 1}$$