Konjugiert harmonische Funktionen

Jede auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare harmonische Funktion u ist Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion f:

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)\,,\ z = x + \mathrm{i}y.$$

Die reelle Funktion $v = \operatorname{Im} f$ erfüllt ebenfalls $\triangle v = 0$. Sie wird als konjugiert harmonisch zu u bezeichnet und f als komplexes Potential.

Beweis:

betrachte das Vektorfeld

$$G = (G_x, G_y)^t = (-u_y, u_x)^t$$

$\Delta u = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Integrabilitätsbedingung

$$\partial_x G_y - \partial_y G_x = 0$$

$\Longrightarrow \quad$ Existenz eines Potentials v, d.h.

$$G = \operatorname{grad} v$$

$\Leftrightarrow \quad$ Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$-u_y = v_x, \quad u_x = v_y$$

$\Longrightarrow \quad f = u + \mathrm{i}v$ komplex differenzierbar und v ebenfalls harmonisch

Beispiel:

Konstruktion einer konjugiert harmonischen Funktion v zu

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

prüfe Harmonizität:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (6x - 0) - 6x = 0 \quad \checkmark$$

integriere die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

- $v_x = -u_y = -(-6xy) \quad \Longrightarrow$
$$v = 3x^2y + c(y)$$
- $v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2 \quad \Longrightarrow$
$$3x^2 + c'(y) = 3x^2 - 3y^2, \quad \text{d.h. } c(y) = -y^3 + C$$

$\rightsquigarrow$ komplexes Potential

$$f(z) = u + \mathrm{i}v = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + C) = (x + \mathrm{i}y)^3 + C = z^3 + C$$