Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle z_1.
Mit Hilfe von Polynomdivision erhält man durch wiederholte Anwendung dieses Satzes die Faktorisierung

$$p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)\,,$$

d.h. die Existenz von genau n Nullstellen von p inklusive Vielfachheiten.

Beweis:

Gegenannahme: p besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{C}$

$\implies \quad z \mapsto 1/p(z)$ ist analytisch (kein Pol)

$|z| \geq c = \max(1, 2(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|)) \quad \implies$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|p(z)|} &\leq \frac{1}{|z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_0|} \\
&\underset{|z|\geq 1}{\leq} \frac{1}{|z|^n - (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|)|z|^{n-1}} \\
&\leq \frac{1}{|z|^n - (|z|/2)|z|^{n-1}} = \frac{1}{|z|^n/2} \leq 2
\end{aligned}$$

$1/|p(z)|$ ist aus Stetigkeitsgründen auch für $|z| \leq c$ beschränkt.

Satz von Liouville $\quad \implies \quad 1/p$ konstant

Widerspruch

$\implies \quad \exists$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ von p