Cauchysche Integralformel

Für ein beschränktes Gebiet D, das durch entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte (Gebiet liegt „links“) stückweise stetig differenzierbare Kurven C_k berandet wird, und eine in D analytische und in $\overline{D}$ stetige Funktion f gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \quad C = \sum_k C_k\,,$$

für alle $z \in D$.

Durch Differenzieren unter dem Integral erhält man eine Darstellung für die Ableitungen:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \quad z \in D\,.$$

Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt somit die Existenz und Stetigkeit von Ableitungen beliebiger Ordnung.

Beweis:

schneide aus dem Gebiet D eine Kreisscheibe D_r um z mit Radius r aus
Mit C_r dem entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand von D_r berandet $C - C_r$ das Teilgebiet $D \backslash D_r$ (korrekte Orientierung des Randes: $D \backslash D_r$ liegt „links“ von $-C_r$).
Cauchys Theorem $\quad \Longrightarrow$

$$0 = \int_{C-C_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dz \quad \Leftrightarrow \quad \int_C \ldots = \int_{C_r} \ldots$$

denn der Integrand ist auf $D \backslash D_r$ analytisch
berechne das Integral über C_r
Stetigkeit von $f = u + \mathrm{i}u \quad \rightsquigarrow$

$$\int_{C_r} \ldots = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\, \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt = 2\pi\mathrm{i}\, \left(u(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}) + iv(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{s}})\right)$$

für $s, \tilde{s} \in [0, 2\pi]$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung
$\int_{C_r} \ldots \to 2\pi i f(z)$ für $r \to 0 \quad \Longrightarrow \quad$ behauptete Integralformel

Beispiel:

$$f(z) = \mathrm{e}^z, \quad C:\ t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Cauchysche Integralformel für einen Kreis $\implies$

$$\int\limits_C \frac{\mathrm{e}^z}{z}\, dz = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^0 = 2\pi\mathrm{i}$$

Versuch der direkten Berechnung:
$dz = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt \quad \rightsquigarrow$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt = \mathrm{i} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\, dt$$

kein Erfolg!

Beispiel:

$$f(w) = \sum_{k=0}^{m} a_k (w-z)^k, \quad C:\ t \mapsto z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ 0 \le t \le 2\pi$$

Integraldarstellung für Ableitungen $\quad \Longrightarrow$

$$2\pi\mathrm{i}\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \left[\sum_{k=0}^{m} a_k \int_C (w-z)^{k-n-1}\,dw\right]$$

$k \neq n$: $\exists$ Stammfunktion für die Monome $(w-z)^{k-n-1}$ und $\int_C \ldots = 0$
$\Longrightarrow \quad [\cdots] = 0$ für $m < n$ und für $m \ge n$ gilt

$$[\cdots] = a_n \int_C \frac{dw}{w-z} = a_n\,(2\pi\mathrm{i})\ \underbrace{n(C,z)}_{\text{Umlaufzahl}} = 2\pi\mathrm{i}\,a_n$$

konsistent mit der direkten Berechnung der Ableitung