Cauchys Theorem

Für ein beschränktes Gebiet D, das durch entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte (Gebiet liegt „links") stückweise stetig differenzierbare Kurven C_k berandet wird, und eine in D analytische und in $\overline{D}$ stetige Funktion f gilt

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

mit $C = \sum_k C_k$.

Insbesondere ist das komplexe Kurvenintegral von f über geschlossene Wege Null, die ein Teilgebiet von D beranden. Allgemeiner verschwindet $\int_C f(z)\,dz$ für jeden Weg, der in D zu einem Punkt homotop ist.

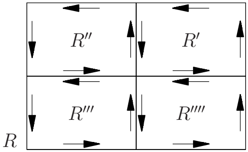
Beweis:

(i) Spezialfall eines Rechtecks R und einer in einer Umgebung von R analytischen Funktion f:

definiere

$$s(R) = \int_C f\, dz$$

mit Randkurve $C = \partial R$ mathematisch positiv orientiert



Aufteilung von R in vier kongruente Rechtecke R', R'', R''' und R'''' $\rightsquigarrow$

$$s(R) = s(R') + s(R'') + s(R''') + s(R'''')$$

aufgrund der Aufhebung entgegengesetzter Wege für mindestens ein Teil-Rechteck R_1 von $R = R_0$ gilt

$$|s(R_1)| \geq \frac{1}{4}|s(R)|$$

Iteration des Unterteilungsprozesses $\rightsquigarrow R = R_0 \supset R_1 \supset \cdots$ mit

$$|s(R_j)| \geq \frac{1}{4}|s(R_{j-1})| \geq \cdots \geq 4^{-j}|s(R_0)|$$

$R_j \to$ Punkt $z_\star$, d.h.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists j(\delta): \quad R_j \subset \{z : |z - z_\star| < \delta\} \quad \text{für } j > j(\delta)$$

f komplex differenzierbar $\quad \Longrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon): \quad |f(z) - f(z_\star) - f'(z_\star)(z - z_\star)| < \varepsilon |z - z_\star|, \quad |z - z_\star| < \delta$$

Existenz von Stammfunktionen für die Monome $\quad \Longrightarrow$

$$\int_{C_j} f(z_\star)\,dz = \int_{C_j} f'(z_\star)(z-z_\star)\,dz = 0, \quad C_j = \partial R_j$$

$j > j(\delta(\varepsilon)) \quad \Longrightarrow$

$$|s(R_j)| = \left| \int_{C_j} f(z) - f(z_\star) - f'(z_\star)(z-z_\star)\,dz \right| \le \varepsilon \int_{C_j} |z-z_\star|\,dz \le \varepsilon d_j L_j$$

wobei d_j die Länge der Diagonale und L_j die Länge des Randes von R_j bezeichnet
$d_j = 2^{-j} d_0\,,\;\; L_j = 2^{-j} L_0 \quad \Longrightarrow$

$$|s(R_0)| \le 4^j |s(R_j)| \le \varepsilon\,(4^j d_j L_j) = \varepsilon\, d_0 L_0$$

ε beliebig $\quad \Longrightarrow \quad |s(R)| = 0$

(ii) Beweisidee im allgemeinen Fall:

- analoger Beweis für ein Dreieck
- Approximation von ∂D durch einen polygonalen, ganz in D enthaltenen Rand
- Triangulierung eines polygonalen Gebietes; Aufhebung der Integrale über innere Kanten $\quad\rightsquigarrow\quad$ Reduktion auf den Fall eines Dreiecks

Beispiel:

illustriere Cauchys Theorem für den Kreis

$$C: \quad z(t) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(i) $\quad f(z) = (z-a)^n \ (n \neq -1)$:

$$\begin{aligned} \int_C f\,dz &= \int_0^{2\pi} (z(t)-a)^n z'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,dt \\ &= \left[r^{n+1} \frac{1}{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

im Einklang mit Cauchys Theorem
Das Verschwinden des Integrals folgt ebenfalls aus der Existenz einer Stammfunktion.

(ii) $\quad f(z) = \mathrm{e}^{z^2}$:

keine explizite Stammfunktion

nicht analytisch berechenbares Kurvenintegral

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^2}\, r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt$$

Cauchys Theorem $\quad \Longrightarrow \quad \int_C f\, dz = 0$

Beispiel:

reelle Darstellung des Kurvenintegrals $\int_C f\,dz$

$$\int\limits_C (u + \mathrm{i}v)(dx + \mathrm{i}dy) = \int\limits_C (udx - vdy) + \mathrm{i} \int\limits_C (udy + vdx)$$

Satz von Green, $\int\limits_{\partial D} \varphi\,dx + \psi\,dy = \iint\limits_D \psi_x - \varphi_y\,dxdy \qquad \Longrightarrow$

$$\int\limits_C f\,dz = -\int\limits_D (u_y + v_x)\,dxdy + \mathrm{i} \int\limits_D (u_x - v_y)\,dxdy\,, \quad C = \partial D$$

Null aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen
Voraussetzung: Stetigkeit der partiellen Ableitungen von u und v
Deshalb keine einfache Beweisalternative, da üblicherweise die Stetigkeit von f' mit dem zu beweisenden Satz von Cauchy hergeleitet wird!