Bessel-Differentialgleichung

Die Bessel-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + z u'(z) + (z^2 - \alpha^2) u(z) = 0$$

besitzt für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ die als Bessel-Funktion bezeichneten, linear unabhängigen Lösungen

$$J_{\pm\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} .$$

Für $\alpha \in \mathbb{Z}$ existiert eine Lösung mit der angegebenen Reihendarstellung nur für den positiven Index. Die zweite linear unabhängige Lösung ist in diesem Fall eine sogenannte Bessel-Funktion zweiter Art.

Einige spezielle Bessel-Funktionen sind

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

und

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \qquad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}.$$

Beweis:

$z = 0$: regulärer singulärer Punkt
charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \alpha^2 = \lambda^2 - \alpha^2 = 0$$

$\rightsquigarrow$ Exponenten $\lambda = \pm\alpha$
Ansatz

$$u(z) = z^\lambda (u_0 + u_1 z + \cdots)$$

Vergleich der Koeffizienten von $z^{\lambda+n}$ in der Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$(\lambda + n)(\lambda + n - 1)u_n + (\lambda + n)u_n + u_{n-2} - \alpha^2 u_n = 0$$

d.h. die Rekursion

$$\left((\lambda + n)^2 - \alpha^2\right) u_n + u_{n-2} = 0$$

Rekursion für Exponenten $\pm\alpha \notin \mathbb{Z}$,

$$u_n = \frac{-u_{n-2}}{n(\pm 2\alpha + n)}, \quad n = 2, 4, \ldots$$

$\rightsquigarrow$

$$u_2 = -\frac{u_0}{2 \cdot 2(\pm\alpha + 1)}, \quad u_4 = \frac{u_0}{2 \cdot 4 \cdot 2(\pm\alpha + 1) \cdot 2(\pm\alpha + 2)}$$

explizite Formel für die Koeffizienten

$$u_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(\pm\alpha + 1)}{2^n n! 2^n \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \, u_0$$

$u_{2n+1} = 0$ und

$$u_0 = \frac{1}{2^{\pm\alpha} \Gamma(\pm\alpha + 1)}$$

$\rightsquigarrow$ behauptete Reihenentwicklung

$-\alpha \in \mathbb{N}$: Rekursion nicht durchführbar

$\rightsquigarrow$ Lösung anderen Typs

spezielle Darstellungen, z.B.

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{z}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right) &= \left[\left(\frac{1}{2}+n\right)\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left[2^{-n-1}(2n+1)(2n-1)\cdots 1\right]\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

sowie

$$n!\,2^{2n} = (2n)(2n-2)\cdots 2\cdot 2^n$$

$\rightsquigarrow$

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{z}{2}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,z^{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}$$