Abschätzungen für komplexe Ableitungen

Ist f auf einer Kreisscheibe mit Radius $> r$ um z analytisch, so gilt

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)|\,.$$

Beweis:

Integralformel für Ableitungen,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw \,,$$

für einen Kreis

$$C: \quad w(t) = z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi \,,$$

um z mit Radius r $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z) \right| &= \left| \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r^{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}t}} \underbrace{\mathrm{i}\, r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt}_{dw} \right| \\ &\le \frac{n!}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\, dt \le \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)| \end{aligned}$$

Beispiel:

illustriere die Abschätzung für

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad f^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-(n+1)}$$

auf einer Kreisscheibe $C : |w - z| < r$ mit $r < |z|$

Abschätzung mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel $\quad \rightsquigarrow$

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)| = \frac{n!}{r^n} \frac{1}{|z| - r}$$

geringfügig schlechter als exakter Wert

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{|z|^{n+1}}$$

denn

$$\max_{0<r<|z|} r^n(|z| - r) = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)(1+1/n)^n} \ge \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)\mathrm{e}}$$

(Schranke um den Faktor $(n+1)\mathrm{e}$ größer)