9.5 Laplace-Transformation

Laplace-Transformation

$u(t)\exp(-at)$ auf $[0,\infty)$ absolut integrierbar $\implies$

$$U(s) = \int\limits_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt, \quad \operatorname{Re} s \geq a$$

$\mathcal{L}:\ u \mapsto U$ linear und injektiv

- $\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v, \quad \mathcal{L}(\lambda u) = \lambda \mathcal{L}u$
- $\mathcal{L}u = 0 \implies u = 0$

Inverse Laplace-Transformation

$u(t)\exp(-at)$ auf $[0,\infty)$ absolut integrierbar $\implies$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)\exp(st)\,ds, \quad b \geq a$$

Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen

$$u(t) = t^n \exp(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$

$a = \lambda + \mathrm{i}\omega \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \exp(\lambda t)\cos(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\,, \\ \exp(\lambda t)\sin(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Verschiebung und Skalierung bei Laplace-Transformation

$$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad \exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$$

mit $\varphi(\cdot - a)$ der um a nach rechts verschobenen Funktion

Skalierung $\rightsquigarrow$

$$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1}U(s/a)$$

Laplace-Transformation periodischer Funktionen

$u(t) = u(t+T)$ (T-periodisch) $\rightsquigarrow$

$$U(s) = \frac{\int_0^T \exp(-st)u(t)\,dt}{1-\exp(-Ts)}$$

Differentiation und Laplace-Transformation

$$
\begin{aligned}
u'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} sU(s) - u(0)\,, \\
tu(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} -U'(s)
\end{aligned}
$$

höhere Ableitungen

$$
\begin{aligned}
u^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0) \\
t^n u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)
\end{aligned}
$$

Stammfunktion

$$
v(t) = \int_0^t u(r)\,dr \qquad \Longrightarrow \qquad V(s) = U(s)/s
$$

Faltung bei Laplace-Transformation

$$
(v \star u)(t) = \int_0^t v(t-r)u(r)\,dr \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}(v \star u) = (\mathcal{L}u)(\mathcal{L}v)
$$

Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Anfangswertproblem

$$
u' + pu = f(t), \quad u(0) = a
$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$
U(s) = \frac{1}{s+p}(F(s) + a)
$$

Lösung durch Faltung mit der inversen Transformation $\varphi(t) = \exp(-pt)$ von $(s+p)^{-1}$,

$$
u = \underbrace{a\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},
$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$

Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Anfangswertproblem

$$
u'' + pu' + qu = f(t), \quad u(0) = a,\, u'(0) = b
$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$
U(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q}\,(F(s) + as + ap + b)
$$

Lösung durch Faltung,

$$
u = \underbrace{a\varphi' + (ap+b)\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},
$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$

λ, ϱ: Nullstellen des charakteristischen Polynoms $s^2 + ps + q \implies$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda t} - e^{\varrho t}}{\lambda - \varrho}\,, & \lambda \neq \varrho \\[2em] te^{\lambda t}\,, & \lambda = \varrho \end{cases}$$