9.4 Lineare Differentialgleichungssysteme und Stabilität

Lineares Differentialgleichungssystem

$$u' = A(t)u + b(t), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}},$$

mit einer $(n \times n)$-Matrix A und einem n-Vektor b

homogen: $b = 0$

Lösung linearer Differentialgleichungssysteme

A, b stetig

$\Longrightarrow$ globale Existenz einer eindeutigen Lösung von

$$u' = A(t)u + b(t)$$

für jeden Anfangswert $u(t_0)$

n linear unabhängige Lösungen $v, w, \ldots$ des homogenen Systems $u' = A(t)u$

$\rightsquigarrow$ Fundamentalmatrix

$$\Gamma = (v, w, \ldots)$$

Lösung

$$u = u_p + u_h, \quad u_h = \Gamma c, \quad c = \Gamma^{-1}(t_0)(u(t_0) - u_p(t_0)),$$

mit u_p einer partikulären Lösung

Wronski-Determinante

$$(\det \Gamma)' = \operatorname{Spur} A(t)\,(\det \Gamma)$$

für eine Fundamentalmatrix Γ des Differentialgleichungssystems $u' = A(t)u$

$\Longrightarrow$

$$\det \Gamma(t) = \det \Gamma(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds\right) > 0$$

insbesondere: $\det \Gamma(t) > 0$

Variation der Konstanten

$$u' = A(t)u + b(t)$$

Lösung des homogenen Systems $(b = 0)$

$$u_h(t) = \Gamma(t)c$$

mit Γ einer Fundamentalmatrix

Ansatz $u(t) = \Gamma(t)c(t) \rightsquigarrow$

$$u(t) = \Gamma(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1} b(s)\, ds \right]$$

Eigenlösungen eines Differentialgleichungssystems

$Av = \lambda v \implies$

$$u(t) = \exp(\lambda t) v \quad \text{löst} \quad u' = Au$$

A reell, $\lambda = \sigma \pm \varrho \mathrm{i} \rightsquigarrow$ reelle Lösungen

$$\exp(\sigma t)(\cos(\varrho t) \operatorname{Re} v - \sin(\varrho t) \operatorname{Im} v), \quad \exp(\sigma t)(\sin(\varrho t) \operatorname{Re} v + \cos(\varrho t) \operatorname{Im} v)$$

Entkopplung des inhomogenen Systems

$$u' = Au + b(t)$$

für diagonalisierbares A

$$Q^{-1} A Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad Q = (v_1, \ldots, v_n)$$

$\implies v_i' = \lambda_i v_i + c_i(t)$ mit $u = Qv$, $c = Q^{-1} b$ und

$$v_i(t) = \exp(\lambda_i t) \left(\exp(-\lambda_i t_0) v_i(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} c_i(s) \exp(-\lambda_i s)\, ds \right)$$

Jordan-Form eines Differentialgleichungssystems

$$u' = Au + b(t), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$$

Transformation auf Jordan-Form,

$$A \to J = Q^{-1} A Q, \quad u = Qv,\ c = Q^{-1} b$$

$\rightsquigarrow$ bidiagonales System (sukzessive lösbar)

$$\begin{aligned} v_n' &= \lambda_n v_n + c_n(t) \\ v_{n-1}' &= \lambda_{n-1} v_{n-1} + \varrho_n v_n + c_{n-1}(t) \\ &\vdots \\ v_1' &= \lambda_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + c_1(t) \end{aligned}$$

mit λ_i den Eigenwerten von A (bzw. Diagonalelementen von J) und $\varrho_i \in \{0, 1\}$

Stabilität linearer Differentialgleichungssysteme

$$u' = Au, \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$$

mit konstanter Matrix A

- stabil, wenn
$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0$$
für alle Anfangswerte $u(0)$

- neutral stabil, wenn Lösungen $u(t)$ für alle $t > 0$ beschränkt bleiben und es Startwerte $u(0)$ gibt, für die $u(t)$ nicht gegen 0 konvergiert

- instabil, wenn
$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$$
für einen Anfangswert $u(0)$

Stabilität $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für alle Eigenwerte von A

instabil, falls $\operatorname{Re}\lambda > 0$ für einen Eigenwert

Klassifizierung reeller zweidimensionaler Differentialgleichungssysteme

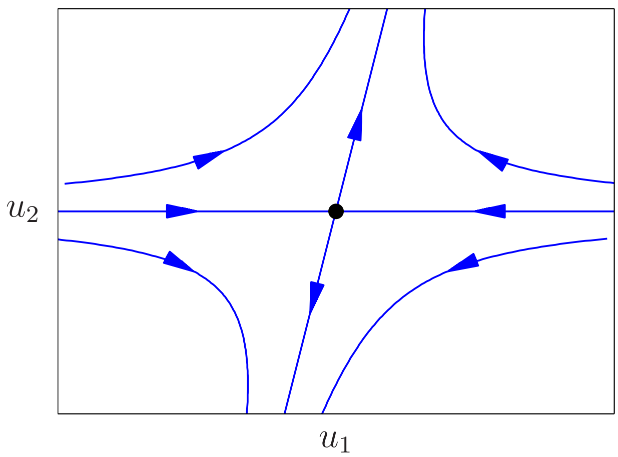
$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}},$$

A: reelle 2×2-Matrix mit Jordan-Normalform

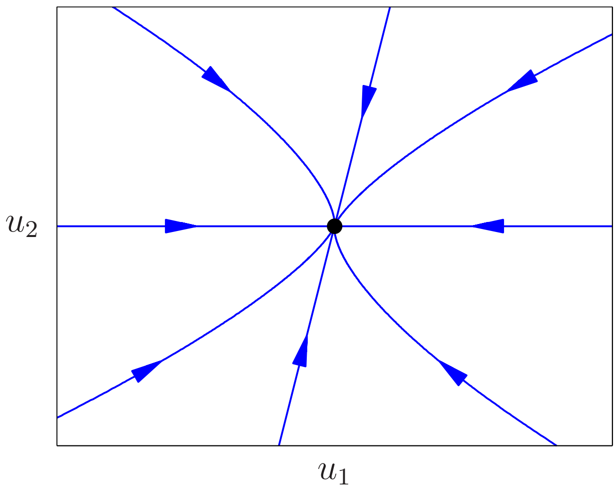
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, \quad s \in \{0, 1\}$$

typische Lösungskurven des transformierten Systems $v' = Jv$

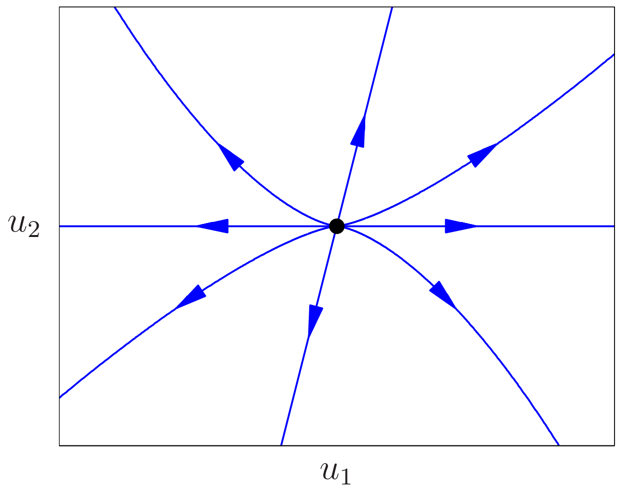
- Instabiler Sattel: $\lambda\varrho < 0$



- Knoten: $\lambda\varrho > 0$, $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$

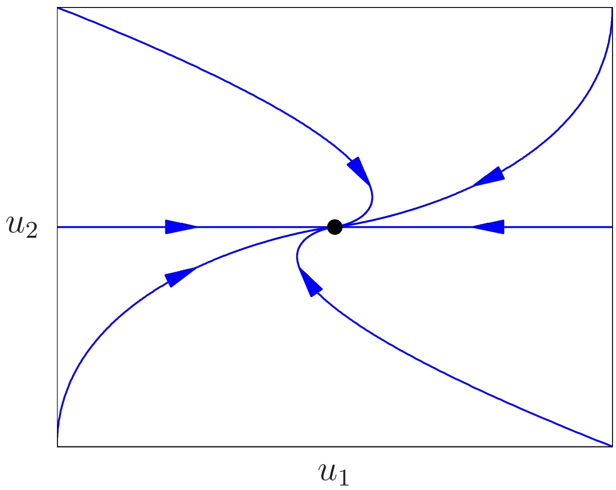


stabil, $\lambda, \varrho < 0$

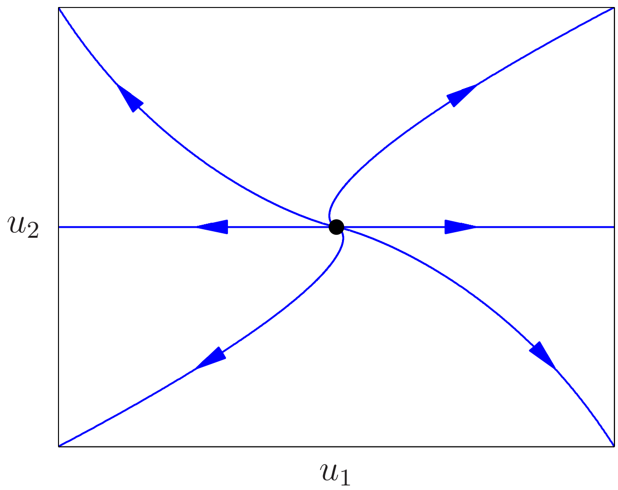


instabil, $\lambda, \varrho > 0$

- entarteter Knoten ($s = 1$, keine Basis aus Eigenvektoren)

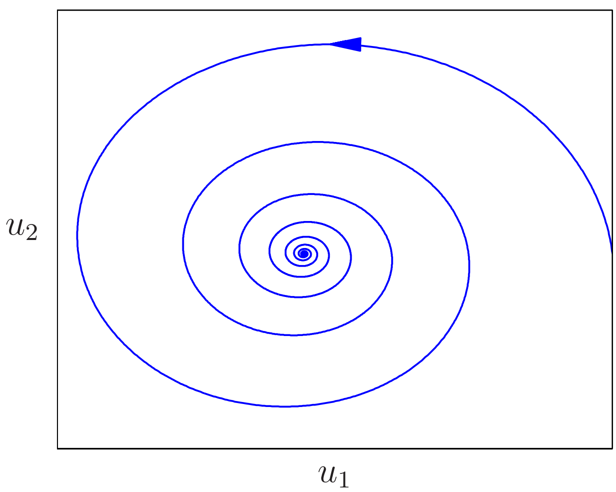


stabil, $\lambda < 0$

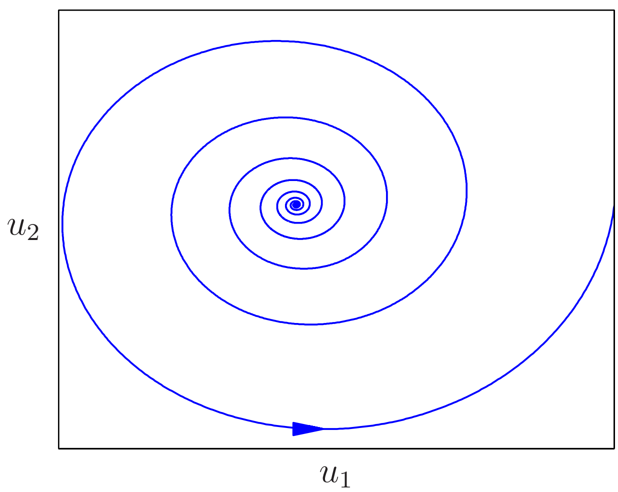


instabil, $\lambda > 0$

- Spirale: $\lambda = r + \mathrm{i}\omega = \bar{\varrho}$, $r\omega \neq 0$

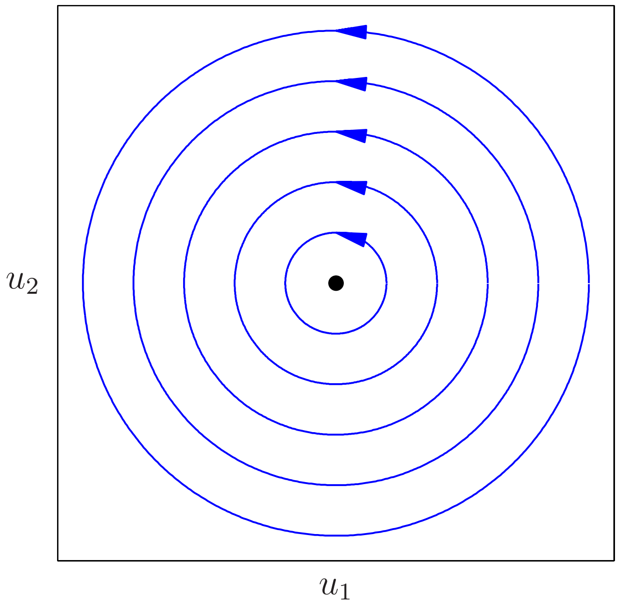


stabil, $r < 0$

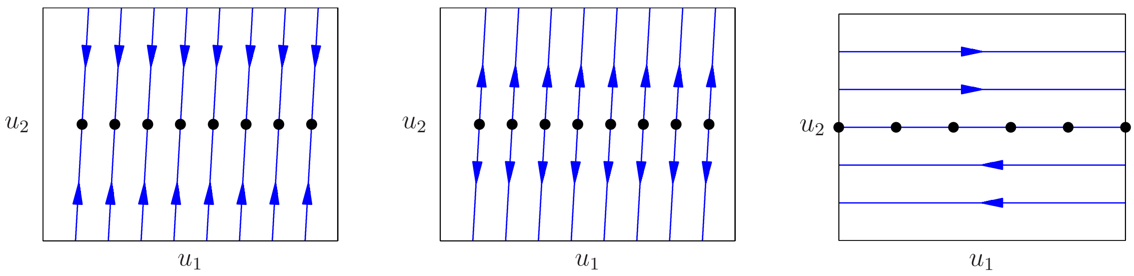


instabil, $r > 0$

- Zentrum: $\lambda = \mathrm{i}\omega = \bar{\varrho}$, $\omega \neq 0$



- degenerierte Fälle, mit einem Eigenwert null



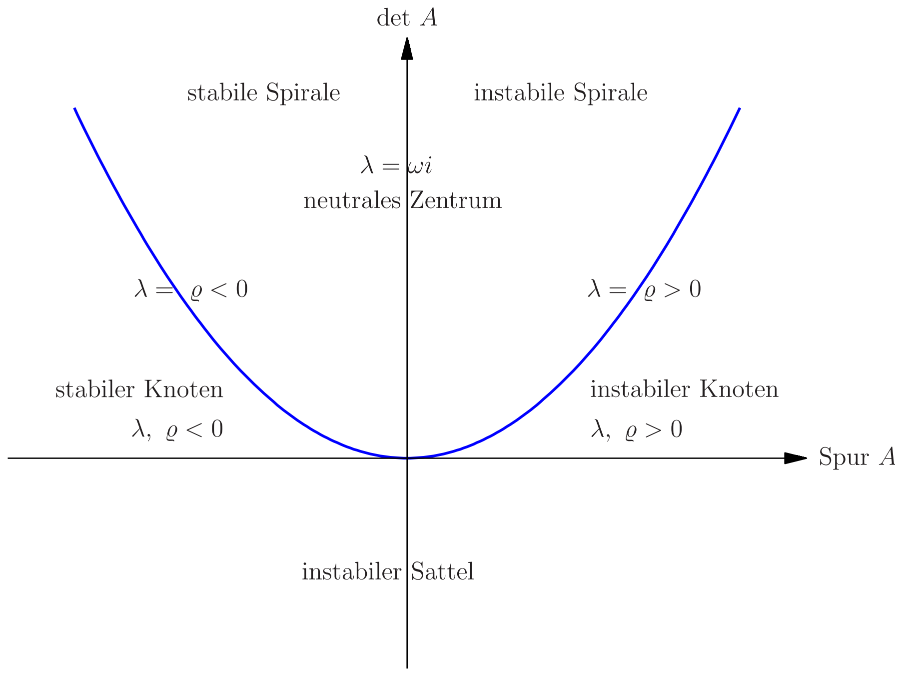
$\lambda = 0,\ \varrho < 0$ $\qquad$ $\lambda = 0,\ \varrho > 0$ $\qquad$ $\lambda = 0,\ \varrho = 0,\ s = 1$

Ruhepunkte entlang der gesamten v_1-Achse

Stabilitätsdiagramm

zweidimensionales Differentialgleichungssystem

$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$$



Parabel (trennt Fälle Spirale/Knoten)

$$\det A = \left(\frac{\operatorname{Spur} A}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \lambda = \varrho$$

Kritische Punkte eines autonomen Differentialgleichungssystems

autonome Differentialgleichung

$$u' = f(u), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$$

kritischer Punkt: Nullstelle u_* von f, entspricht konstanter Lösung ($u(t) = u_*$)

Linearisierung

$$v' = f'(u_*)v$$

mit $v(t) = u(t) - u_*$ und f' der Jacobi-Matrix von f

Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungssysteme

autonomes Differentialgleichungssystems

$$u' = f(u)$$

kritischer Punkt u_* stabil
$\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von $A = f'(u_*)$
$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} u(t) = u_*$ für alle Anfangswerte $u(0)$ in einer Umgebung von u_*

Typeneinteilung (stabiler Knoten oder Spirale) analog zum approximierenden linearen Differentialgleichungssystem

$$v' = Av, \quad v(t) = u(t) - u_*$$