9.3 Nichtlineare Differentialgleichungssysteme in Standardform

System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}},\ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingung: $u(t_0) = a$

autonomes System: $f = f(u)$

Transformation eines Differentialgleichungssystems auf Standardform

Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

Elimination höherer Ableitungen via $u(t) = (y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$
$\rightsquigarrow$ äquivalentes System erster Ordnung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= g(t, u(t)) \end{aligned}$$

Satz von Peano

f in einer Umgebung D von $(t_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig
$\implies$ Existenz mindestens einer Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

in D

Eindeutigkeit der Lösung eines Differentialgleichungssystems

$f(t, u)$ in einer Umgebung $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ von (t_0, a) Lipschitz-stetig bzgl. u
$\implies$ eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

in D

Ableitung nach Anfangsbedingungen

$$u' = f(t,u), \quad u(t_0) = a$$

partielle Ableitung nach den Anfangsbedingungen $(a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}$

$\leadsto$ Differentialgleichungssystem für die Jacobi-Matrix

$$u_a' = f_u(t,u)u_a, \quad u_a(t_0) = E\,,$$

mit der Einheitsmatrix E und

$$u_a = \left(\frac{\partial u}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial a_n}\right)$$