9.2 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Linearer Oszillator

$$u'' + \omega_0^2 u = c\cos(\omega t), \quad \omega_0 > 0$$

allgemeine Lösung: $u = u_h + u_p$ mit

$$u_h(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

und

$$u_p(t) = \frac{c}{\omega^2 - \omega_0^2}\,(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)), \quad \omega \neq \omega_0$$

sowie

$$u_p(t) = \frac{c}{2\omega}\,t\sin(\omega t)$$

im Resonanzfall $\omega = \omega_0$

Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$ Festlegung der Konstanten

$$a = u(0), \quad b = u'(0)/\omega_0$$

Homogene Differentialgleichung zweiter Ordniung mit konstanten Koeffizienten

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + p\lambda + q$$

verschiedene Lösungstypen

- zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$u(t) = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$

- eine doppelte Nullstelle λ:

$$u(t) = a\exp(\lambda t) + bt\exp(\lambda t)$$

- zwei komplex konjugierte Nullstellen $-p/2 \pm \varrho\mathrm{i}$:

$$u(t) = \exp\left(-\frac{pt}{2}\right)(a\cos(\varrho t) + b\sin(\varrho t))$$

Anfangsbedingungen für u und u' $\rightsquigarrow$ Festlegung der Konstanten a, b

Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = f(t)\,, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Ansätze für partikuläre Lösungen

- Polynome:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \quad \to \quad u(t) = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j$$

  Multiplikation von u mit t (t^2), falls $q = 0$ ($q = p = 0$)

- Exponentialfunktionen:

$$f(t) = \exp(\lambda t) \quad \to \quad u(t) = c \exp(\lambda t),$$

  Multiplikation von u mit t (t^2), falls λ Nullstelle (doppelte Nullstelle) des charakteristischen Polynoms

- Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp(\alpha t)(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) \\ \to u(t) &= \exp(\alpha t)(a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

  Multiplikation von u mit t, falls $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + p\lambda + q$

Superposition der Ansätze bei gemischten Termen

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c \cos(\omega t), \quad r > 0$$

verschiedene Lösungstypen der homogenen Gleichung

- starke Dämpfung $(r > \omega_0)$:

$$u_h = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t), \quad \lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

- kritische Dämpfung $(r = \omega_0)$:

$$u_h = (a + bt) \exp(-rt)$$

- schwache Dämpfung $(r < \omega_0)$:

$$u_h = \exp(-rt)\,(a \cos(\lambda t) + b \sin(\lambda t))\,, \quad \lambda = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$$

partikuläre Lösung

$$u_p(t) = c' \cos(\omega t + \delta)$$

mit Amplitude $c' = c/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$ und Phase $\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}2r\omega)$

allgemeine Lösung: $u = u_h + u_p$

Phasenebene

autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

Lösungen: Kurven $t \mapsto (u(t), v(t))$, $v = u'$, in der Phasenebene

$f(u_0, 0) = 0 \rightsquigarrow$ kritischer Punkt $(u_0, 0)$ bzw. konstante Lösung $u(t) = u_0$

äquivalente Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv}{du} v = f(u, v), \quad v = v(u)$$

Energieerhaltung

$$u'' + \Phi'(u) = 0$$

eindimensionale Bewegung unter einem durch ein Potential Φ induzierten Kraftfeld

Summe kinetischer und potentieller Energie

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \Phi(u), \quad v = u'$$

$\rightsquigarrow$ implizite Darstellung von Lösungskurven in der Phasenebene: $E(u, v) = \mathrm{const}$