Teil 9

Differentialgleichungen

9.1 Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y), \quad y = y(x)$$

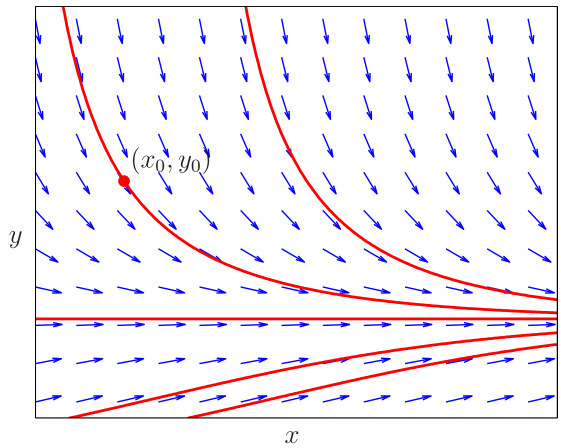
Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Richtungsfeld

Visulisierung der durch die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

bestimmten Steigungen von Lösungskurven, festgelegt durch Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$



Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = py + q$$

allgemeine Lösung

$$y = y_p + y_h$$

mit

$$y_h = c\exp(P(x)), \quad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(s)\, ds$$

der allgemeinen Lösung der der homogenen Differentialgleichung ($q(x) = 0$) und einer partikulären Lösung

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \exp(P(x) - P(s))q(s)\, ds$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow c = y_0$

Bernoullische Differentialgleichung

$$u' + pu = qu^k, \quad k \neq 0, 1\,,$$

Substitution

$$y = u^{1-k}, \quad y' = (1-k)u^{-k}u'$$

$\rightsquigarrow$ lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-k}\,y' = -py + q$$

Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = py + q, \quad p \in \mathbb{R}$$

Ansätze für partikuläre Lösungen y_p

- $q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \to y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$
- $q(x) = c\exp(\lambda x)$, $\lambda \neq p$, $\to y_p = \dfrac{c}{\lambda - p}\,\exp(\lambda x)$
- $q(x) = c\exp(px) \ \to y_p = cx\exp(px)$
- $q(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \to y_p = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)$

allgemeine Lösung

$$y = y_p + c\exp(px)$$

Separable Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{p(x)g(y)}_{f(x,y(x))}$$

Lösung durch Bilden von Stammfunktionen

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$y' = f(y/x)$$

Substitution

$$xz(x) = y(x), \quad z + xz' = f(z)$$

$\rightsquigarrow$ separable Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

Exakte Differentialgleichung

$$q(x,y)y' + p(x,y) = 0$$

mit

$$p = F_x,\ q = F_y \quad \Leftrightarrow \quad (p,q)^{\mathrm{t}} = \operatorname{grad} F$$

notwendig: Integratibilitätsbedingung $p_y = q_x$
hinreichend bei einfach zusammenhängendem Definitionsgebiet

implizite Darstellung der Lösungen

$$F(x,y) = c$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Integrierender Faktor

Multiplikation der Differentialgleichung

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$$

mit einer Funktion $a(x,y)$, die auf eine exakte Differentialgleichung führt, d.h.

$$(ap)_y = (aq)_x$$

9.2 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Linearer Oszillator

$$u'' + \omega_0^2 u = c\cos(\omega t), \quad \omega_0 > 0$$

allgemeine Lösung: $u = u_h + u_p$ mit

$$u_h(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

und

$$u_p(t) = \frac{c}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)\right), \quad \omega \neq \omega_0$$

sowie

$$u_p(t) = \frac{c}{2\omega}\, t\sin(\omega t)$$

im Resonanzfall $\omega = \omega_0$

Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$ Festlegung der Konstanten

$$a = u(0), \quad b = u'(0)/\omega_0$$

Homogene Differentialgleichung zweiter Ordniung mit konstanten Koeffizienten

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + p\lambda + q$$

verschiedene Lösungstypen

- zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$u(t) = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$

- eine doppelte Nullstelle λ:

$$u(t) = a\exp(\lambda t) + bt\exp(\lambda t)$$

- zwei komplex konjugierte Nullstellen $-p/2 \pm \varrho\mathrm{i}$:

$$u(t) = \exp\left(-\frac{pt}{2}\right)\left(a\cos(\varrho t) + b\sin(\varrho t)\right)$$

Anfangsbedingungen für u und u' $\rightsquigarrow$ Festlegung der Konstanten a, b

Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = f(t)\,, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Ansätze für partikuläre Lösungen

- Polynome:

  $$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \quad \rightarrow \quad u(t) = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j$$

  Multiplikation von u mit t (t^2), falls $q = 0$ ($q = p = 0$)

- Exponentialfunktionen:

  $$f(t) = \exp(\lambda t) \quad \rightarrow \quad u(t) = c\exp(\lambda t),$$

  Multiplikation von u mit t (t^2), falls λ Nullstelle (doppelte Nullstelle) des charakteristischen Polynoms

- Trigonometrische Funktionen:

  $$\begin{aligned} f(t) &= \exp(\alpha t)(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) \\ \rightarrow u(t) &= \exp(\alpha t)(a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

  Multiplikation von u mit t, falls $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + p\lambda + q$

Superposition der Ansätze bei gemischten Termen

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c\cos(\omega t), \quad r > 0$$

verschiedene Lösungstypen der homogenen Gleichung

- starke Dämpfung $(r > \omega_0)$:

  $$u_h = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t), \quad \lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

- kritische Dämpfung $(r = \omega_0)$:

  $$u_h = (a + bt)\exp(-rt)$$

- schwache Dämpfung $(r < \omega_0)$:

  $$u_h = \exp(-rt)\,(a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t))\,, \quad \lambda = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$$

partikuläre Lösung

$$u_p(t) = c'\cos(\omega t + \delta)$$

mit Amplitude $c' = c/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$ und Phase $\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}2r\omega)$

allgemeine Lösung: $u = u_h + u_p$

Phasenebene

autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

Lösungen: Kurven $t \mapsto (u(t), v(t))$, $v = u'$, in der Phasenebene

$f(u_0, 0) = 0 \rightsquigarrow$ kritischer Punkt $(u_0, 0)$ bzw. konstante Lösung $u(t) = u_0$

äquivalente Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv}{du} v = f(u, v), \quad v = v(u)$$

Energieerhaltung

$$u'' + \Phi'(u) = 0$$

eindimensionale Bewegung unter einem durch ein Potential Φ induzierten Kraftfeld

Summe kinetischer und potentieller Energie

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \Phi(u), \quad v = u'$$

$\rightsquigarrow$ implizite Darstellung von Lösungskurven in der Phasenebene: $E(u, v) = \text{const}$

9.3 Nichtlineare Differentialgleichungssysteme in Standardform

System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}},\ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingung: $u(t_0) = a$

autonomes System: $f = f(u)$

Transformation eines Differentialgleichungssystems auf Standardform

Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

Elimination höherer Ableitungen via $u(t) = (y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$
$\rightsquigarrow$ äquivalentes System erster Ordnung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= g(t, u(t)) \end{aligned}$$

Satz von Peano

f in einer Umgebung D von $(t_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig
$\Longrightarrow$ Existenz mindestens einer Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

in D

Eindeutigkeit der Lösung eines Differentialgleichungssystems

$f(t, u)$ in einer Umgebung $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ von (t_0, a) Lipschitz-stetig bzgl. u
$\Longrightarrow$ eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

in D

Ableitung nach Anfangsbedingungen

$$u' = f(t,u), \quad u(t_0) = a$$

partielle Ableitung nach den Anfangsbedingungen $(a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}$

$\rightsquigarrow$ Differentialgleichungssystem für die Jacobi-Matrix

$$u_a' = f_u(t,u)u_a, \quad u_a(t_0) = E\,,$$

mit der Einheitsmatrix E und

$$u_a = \left(\frac{\partial u}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial a_n}\right)$$

9.4 Lineare Differentialgleichungssysteme und Stabilität

Lineares Differentialgleichungssystem

$$u' = A(t)u + b(t), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}},$$

mit einer $(n \times n)$-Matrix A und einem n-Vektor b

homogen: $b = 0$

Lösung linearer Differentialgleichungssysteme

A, b stetig

$\Longrightarrow$ globale Existenz einer eindeutigen Lösung von

$$u' = A(t)u + b(t)$$

für jeden Anfangswert $u(t_0)$

n linear unabhängige Lösungen $v, w, \ldots$ des homogenen Systems $u' = A(t)u$

$\rightsquigarrow$ Fundamentalmatrix

$$\Gamma = (v, w, \ldots)$$

Lösung

$$u = u_p + u_h, \quad u_h = \Gamma c, \quad c = \Gamma^{-1}(t_0)(u(t_0) - u_p(t_0)),$$

mit u_p einer partikulären Lösung

Wronski-Determinante

$$(\det \Gamma)' = \operatorname{Spur} A(t)\,(\det \Gamma)$$

für eine Fundamentalmatrix Γ des Differentialgleichungssystems $u' = A(t)u$

$\Longrightarrow$

$$\det \Gamma(t) = \det \Gamma(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds\right) > 0$$

insbesondere: $\det \Gamma(t) > 0$

Variation der Konstanten

$$u' = A(t)u + b(t)$$

Lösung des homogenen Systems ($b = 0$)

$$u_h(t) = \Gamma(t)c$$

mit Γ einer Fundamentalmatrix

Ansatz $u(t) = \Gamma(t)c(t) \rightsquigarrow$

$$u(t) = \Gamma(t)\left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds\right]$$

Eigenlösungen eines Differentialgleichungssystems

$Av = \lambda v \implies$

$$u(t) = \exp(\lambda t)v \quad \text{löst} \quad u' = Au$$

A reell, $\lambda = \sigma \pm \varrho\mathrm{i} \rightsquigarrow$ reelle Lösungen

$$\exp(\sigma t)(\cos(\varrho t)\operatorname{Re} v - \sin(\varrho t)\operatorname{Im} v), \quad \exp(\sigma t)(\sin(\varrho t)\operatorname{Re} v + \cos(\varrho t)\operatorname{Im} v)$$

Entkopplung des inhomogenen Systems

$$u' = Au + b(t)$$

für diagonalisierbares A

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad Q = (v_1, \ldots, v_n)$$

$\implies v_i' = \lambda_i v_i + c_i(t)$ mit $u = Qv$, $c = Q^{-1}b$ und

$$v_i(t) = \exp(\lambda_i t)\left(\exp(-\lambda_i t_0)v_i(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} c_i(s)\exp(-\lambda_i s)\,ds\right)$$

Jordan-Form eines Differentialgleichungssystems

$$u' = Au + b(t), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$$

Transformation auf Jordan-Form,

$$A \to J = Q^{-1}AQ, \quad u = Qv,\ c = Q^{-1}b$$

$\rightsquigarrow$ bidiagonales System (sukzessive lösbar)

$$\begin{aligned} v_n' &= \lambda_n v_n + c_n(t) \\ v_{n-1}' &= \lambda_{n-1}v_{n-1} + \varrho_n v_n + c_{n-1}(t) \\ &\vdots \\ v_1' &= \lambda_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + c_1(t) \end{aligned}$$

mit λ_i den Eigenwerten von A (bzw. Diagonalelementen von J) und $\varrho_i \in \{0, 1\}$

Stabilität linearer Differentialgleichungssysteme

$$u' = Au, \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$$

mit konstanter Matrix A

- stabil, wenn
$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0$$
für alle Anfangswerte $u(0)$

- neutral stabil, wenn Lösungen $u(t)$ für alle $t > 0$ beschränkt bleiben und es Startwerte $u(0)$ gibt, für die $u(t)$ nicht gegen 0 konvergiert

- instabil, wenn
$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$$
für einen Anfangswert $u(0)$

Stabilität $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für alle Eigenwerte von A

instabil, falls $\operatorname{Re}\lambda > 0$ für einen Eigenwert

Klassifizierung reeller zweidimensionaler Differentialgleichungssysteme

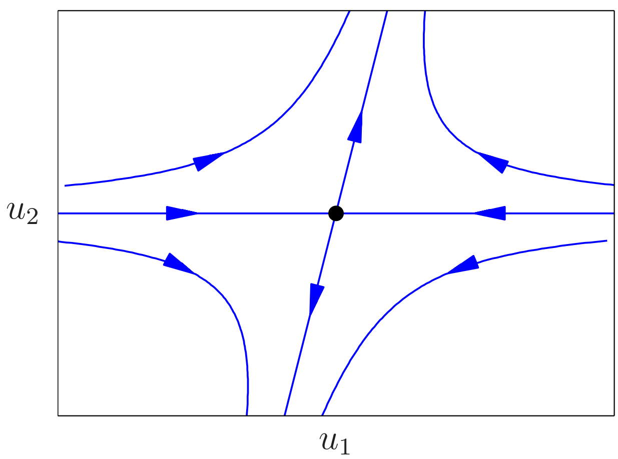
$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}\,,$$

A: reelle 2×2-Matrix mit Jordan-Normalform

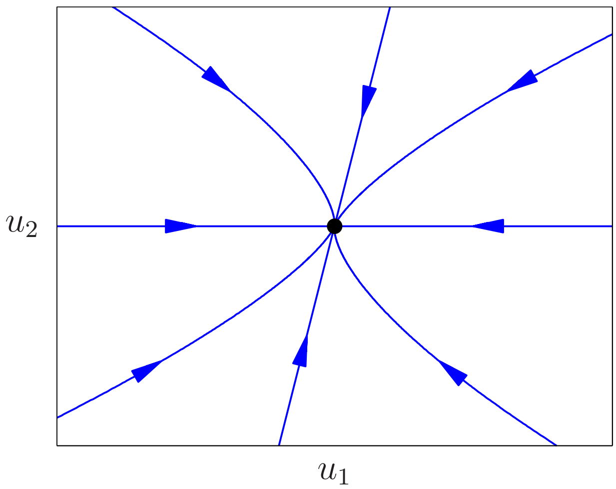
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, \quad s \in \{0, 1\}$$

typische Lösungskurven des transformierten Systems $v' = Jv$

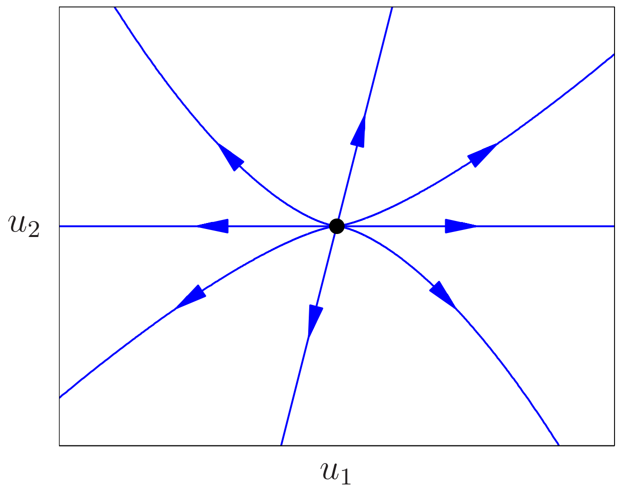
- Instabiler Sattel: $\lambda\varrho < 0$



- Knoten: $\lambda\varrho > 0$, $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$

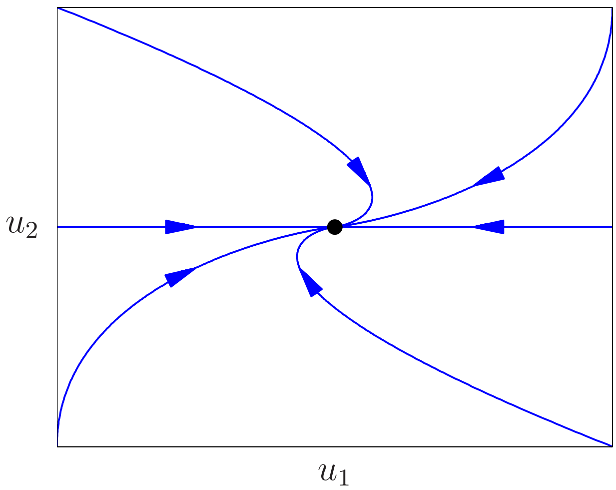


stabil, $\lambda, \varrho < 0$

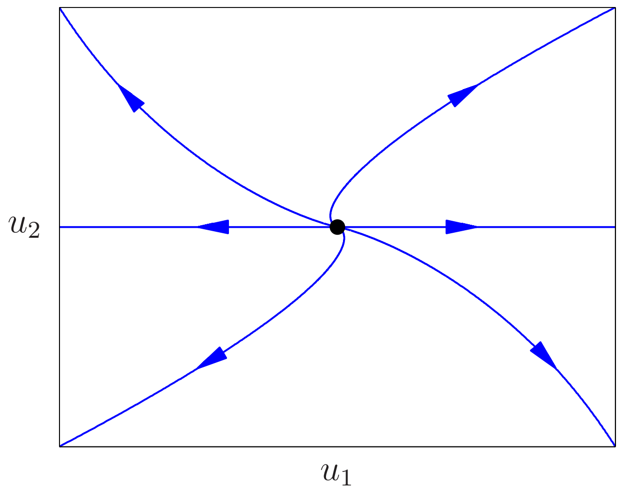


instabil, $\lambda, \varrho > 0$

- entarteter Knoten ($s = 1$, keine Basis aus Eigenvektoren)

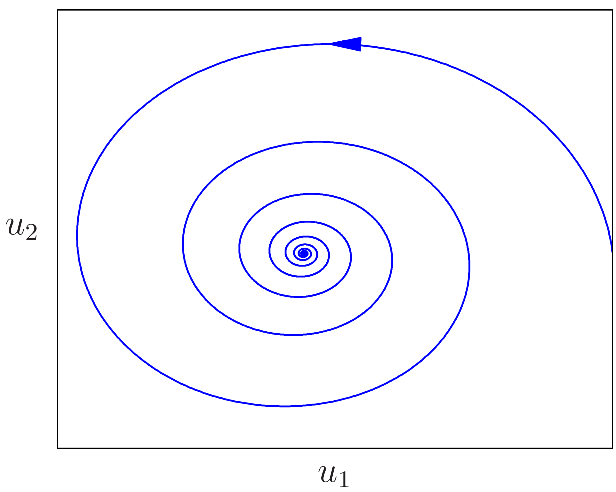


stabil, $\lambda < 0$

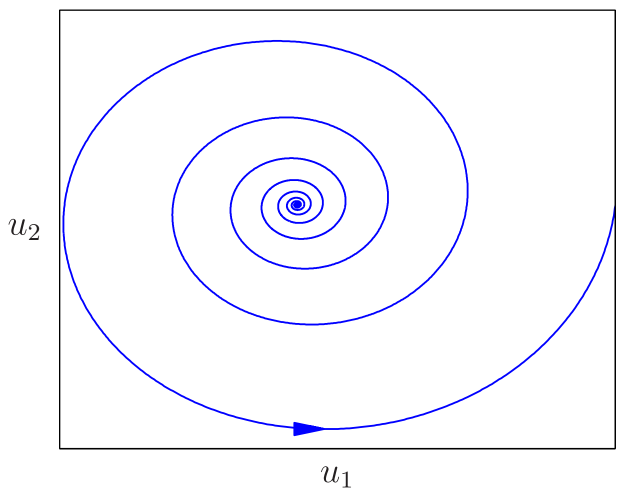


instabil, $\lambda > 0$

- Spirale: $\lambda = r + \mathrm{i}\omega = \bar{\varrho}$, $r\omega \neq 0$

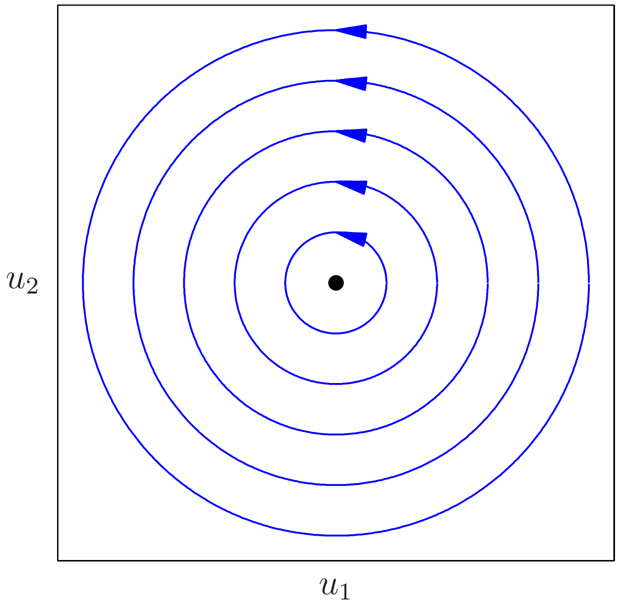


stabil, $r < 0$

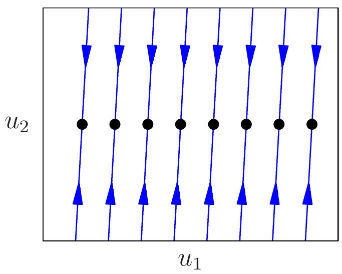


instabil, $r > 0$

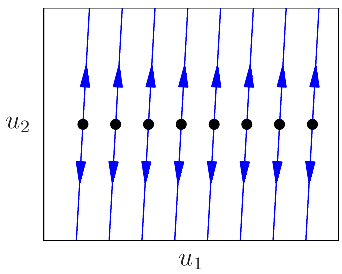
- Zentrum: $\lambda = \mathrm{i}\omega = \bar{\varrho}$, $\omega \neq 0$



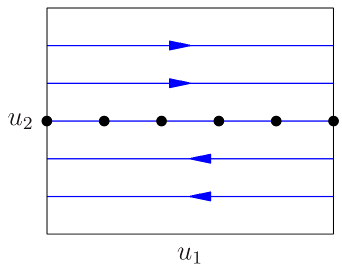
- degenerierte Fälle, mit einem Eigenwert null



$\lambda = 0,\ \varrho < 0$



$\lambda = 0,\ \varrho > 0$



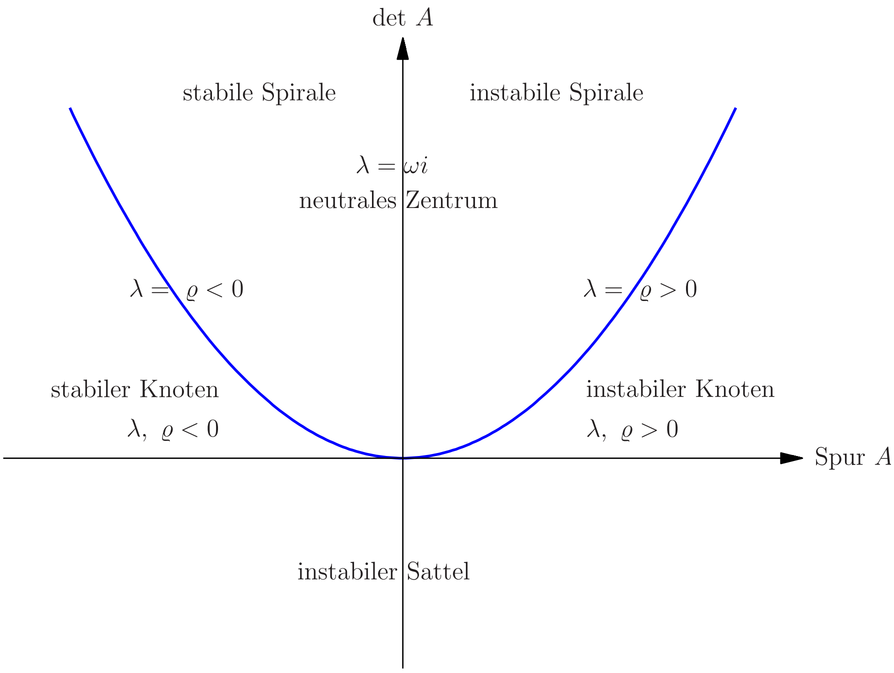
$\lambda = 0,\ \varrho = 0,\ s = 1$

Ruhepunkte entlang der gesamten v_1-Achse

Stabilitätsdiagramm

zweidimensionales Differentialgleichungssystem

$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$$



Parabel (trennt Fälle Spirale/Knoten)

$$\det A = \left(\frac{\operatorname{Spur} A}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \lambda = \varrho$$

Kritische Punkte eines autonomen Differentialgleichungssystems

autonome Differentialgleichung

$$u' = f(u), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$$

kritischer Punkt: Nullstelle u_* von f, entspricht konstanter Lösung $(u(t) = u_*)$

Linearisierung

$$v' = f'(u_*)v$$

mit $v(t) = u(t) - u_*$ und f' der Jacobi-Matrix von f

Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungssysteme

autonomes Differentialgleichungssystems

$$u' = f(u)$$

kritischer Punkt u_* stabil
$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von $A = f'(u_*)$
$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} u(t) = u_*$ für alle Anfangswerte $u(0)$ in einer Umgebung von u_*

Typeneinteilung (stabiler Knoten oder Spirale) analog zum approximierenden linearen Differentialgleichungssystem

$$v' = Av, \quad v(t) = u(t) - u_*$$

9.5 Laplace-Transformation

Laplace-Transformation

$u(t)\exp(-at)$ auf $[0,\infty)$ absolut integrierbar $\implies$

$$U(s) = \int\limits_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt, \quad \operatorname{Re} s \geq a$$

$\mathcal{L}:\ u \mapsto U$ linear und injektiv

- $\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v, \quad \mathcal{L}(\lambda u) = \lambda\mathcal{L}u$
- $\mathcal{L}u = 0 \implies u = 0$

Inverse Laplace-Transformation

$u(t)\exp(-at)$ auf $[0,\infty)$ absolut integrierbar $\implies$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)\exp(st)\,ds, \quad b \geq a$$

Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen

$$u(t) = t^n \exp(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$

$a = \lambda + \mathrm{i}\omega \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \exp(\lambda t)\cos(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}, \\ \exp(\lambda t)\sin(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Verschiebung und Skalierung bei Laplace-Transformation

$$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad \exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$$

mit $\varphi(\cdot - a)$ der um a nach rechts verschobenen Funktion

Skalierung $\rightsquigarrow$

$$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1}U(s/a)$$

Laplace-Transformation periodischer Funktionen

$u(t) = u(t+T)$ (T-periodisch) $\rightsquigarrow$

$$U(s) = \frac{\int_0^T \exp(-st)u(t)\,dt}{1-\exp(-Ts)}$$

Differentiation und Laplace-Transformation

$$
\begin{aligned}
u'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} sU(s) - u(0)\,, \\
tu(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} -U'(s)
\end{aligned}
$$

höhere Ableitungen

$$
\begin{aligned}
u^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0) \\
t^n u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)
\end{aligned}
$$

Stammfunktion

$$
v(t) = \int\limits_0^t u(r)\,dr \quad \Longrightarrow \quad V(s) = U(s)/s
$$

Faltung bei Laplace-Transformation

$$
(v \star u)(t) = \int\limits_0^t v(t-r)u(r)\,dr \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(v \star u) = (\mathcal{L}u)(\mathcal{L}v)
$$

Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Anfangswertproblem

$$
u' + pu = f(t), \quad u(0) = a
$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$
U(s) = \frac{1}{s+p}(F(s) + a)
$$

Lösung durch Faltung mit der inversen Transformation $\varphi(t) = \exp(-pt)$ von $(s+p)^{-1}$,

$$
u = \underbrace{a\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},
$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$

Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Anfangswertproblem

$$
u'' + pu' + qu = f(t), \quad u(0) = a,\, u'(0) = b
$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$
U(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q}\,(F(s) + as + ap + b)
$$

Lösung durch Faltung,

$$
u = \underbrace{a\varphi' + (ap+b)\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},
$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$

λ, ϱ: Nullstellen des charakteristischen Polynoms $s^2 + ps + q \implies$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda t} - e^{\varrho t}}{\lambda - \varrho}, & \lambda \neq \varrho \\ \\ te^{\lambda t}, & \lambda = \varrho \end{cases}$$