8.5 Potentialtheorie

Potential

U Potential von $\vec{F} \Leftrightarrow$

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U$$

Arbeitsintegral entspricht Potentialdifferenz

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) = [U]_A^B$$

für jeden Weg $C: t \mapsto \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ von A nach B

$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ für geschlossene Wege

Existenz eines Potentials

Existenz eines Potentials $\Leftrightarrow$ Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals $\Leftrightarrow$

$$U(P) = U(P_0) + \int\limits_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit $C_P: t \mapsto \vec{r}(t)$ einem beliebigen Weg, der P_0 mit P verbindet

Potential bis auf eine Konstante eindeutig

Integrabilitätsbedingung

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

Umkehrung gültig für einfach zusammenhängende Gebiete

Konstruktion eines Potentials

$$\operatorname{grad} U = \vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^{\mathrm{t}}$$

Integration von F_x bzgl. $x \rightsquigarrow$

$$U(x, y, z) = \int F_x dx = U_1(x, y, z) + C_1(y, z)$$

Integration von $F_y = \partial_y U = \partial_y U_1 + \partial_y C_1$ bzgl. $y \rightsquigarrow$

$$C_1(y, z) = \int (F_y - \partial_y U_1)\; dy = U_2(y, z) + C_2(z)$$

Integration von $F_z = \partial_z U = \partial_z U_1 + \partial_z U_2 + \partial_z C_2$ bzgl. $z \rightsquigarrow$

$$C_2(z) = \int (F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2)\; dz = U_3(z) + c$$

Hakenintegral

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^{\mathrm{t}} = \operatorname{grad} U \rightsquigarrow$

$$U(Q) = U(P) + \int\limits_{p_1}^{q_1} F_x(x, p_2, p_3)\, dx + \int\limits_{p_2}^{q_2} F_y(q_1, y, p_3)\, dy + \int\limits_{p_3}^{q_3} F_z(q_1, q_2, z)\, dz$$

analoge Integrale bei Permutation der Koordinaten

Vektorpotential

$\vec{A}$ Vektorpotential von $\vec{F} \Leftrightarrow$

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Existenz eines Vektorpotentials

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

Umkehrung gültig auf einfach zusammenhängendem Gebiet

Vektorpotential bis auf ein Gradientenfeld eindeutig bestimmt:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \vec{A} + \operatorname{grad} U$$

$-\Delta U = \operatorname{div} \vec{A}$ (Eichung) $\rightsquigarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$

Konstruktion eines Vektorpotentials

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int\limits_{x_0}^{x} F_z(\xi, y, z)\, d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} F_x(x_0, y, \zeta)\, d\zeta \\ -\int\limits_{x_0}^{x} F_y(\xi, y, z)\, d\xi \end{pmatrix}$$

analoge Formeln durch zyklisches Vertauschen der Variablen