8.3 Integration

Kurvenintegral

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r})\,|\vec{r}\,'(t)|dt$$

für eine Kurve $C:\ [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{t}}$ und ein Skalarfeld $U(x,y,z)$

unabhängig von der Parametrisierung und insbesondere der Orientierung

Weg

Kurve mit festgelegtem Durchlaufsinn

$$C:\ [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

zusammengesetzte Wege: $C_1 + \cdots + C_m$

Weg mit umgekehrtem Durchlaufsinn: $-C$

Arbeitsintegral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

für einen Weg $C:\ [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{t}}$ und ein Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z)$

bei gleichbleibender Orientierung unabhängig von der Parametrisierung;
Änderung des Vorzeichens bei Umkehrung der Durchlaufrichtung

alternative Schreibweise:

$$\int_C F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz, \quad dx = x'(t)\, dt,\ dy = y'(t)\, dt,\ dz = z'(t)\, dt$$

Flächenintegral

$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u,v))\,|\vec{n}(u,v)| dudv\,, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

für eine Fläche $S:\ D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^{\mathrm{t}}$ und ein Skalarfeld $U(x,y,z)$

unabhängig von der Parametrisierung

Flussintegral

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{F}\cdot \vec{n}^\circ dS = \iint\limits_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot \vec{n}(u,v)\,dudv$$

für eine Parametrisierung $D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^{\mathrm{t}}$ der Fläche S und mit

$$d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS\,, \quad dS = |\vec{n}(u,v)|\,dudv$$

dem vektoriellen Flächenelement in Richtung der Normalen $\vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$

bei gleicher Orientierung des Normalenvektors unabhängig von der Parametrisierung; Änderung des Vorzeichens bei Umkehrung der Normalenrichtung

Fluss durch einen Funktionsgraph

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_D -F_x\partial_x f - F_y\partial_y f + F_z\,dxdy$$

für eine skalare Funktion $z = f(x,y)$ mit Definitionsbereich D und Graph S (Normale mit positiver z-Komponente)

Fluss durch einen Zylindermantel

Randkurve $\varrho = \varrho(\varphi) \rightsquigarrow$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho\varrho - F_\varphi\partial_\varphi\varrho\;dz\,d\varphi, \quad \vec{F}(\varrho,\varphi,z) = F_\varrho\vec{e}_\varrho + F_\varphi\vec{e}_\varphi + F_z\vec{e}_z$$

(Flussrichtung nach außen)

$\varrho = a$ (Kreiszylinder) $\rightsquigarrow$

$$a\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho\,dz\,d\varphi$$

Fluss durch eine Sphäre

Radius $r = a \rightsquigarrow$

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_r a^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta, \quad \vec{F}(r,\vartheta,\varphi) = F_r\vec{e}_r + F_\vartheta\vec{e}_\vartheta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

radiales Feld $\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r \rightsquigarrow$ Fluss $4\pi a^2 f(a)$