8.2 Differentialoperatoren

Gradient

$$\operatorname{grad} U = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix} \quad \text{für ein Skalarfeld} \quad U(x,y,z)$$

entspricht Richtung des stärksten Anstiegs

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

alternative Definition:

$$\operatorname{grad} U(P) = \lim_{\operatorname{diam} V \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol} V} \iint_S U d\vec{S}$$

mit S der Oberfläche eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V und nach außen orientiertem vektoriellem Flächenelement $d\vec{S}$

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

entspricht der Quelldichte

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

alternative Definition:

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{\operatorname{diam} V \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol} V} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

mit S der Oberfläche eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V und $d\vec{S}$ dem nach außen orientierten vektoriellen Flächenelement

Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

entspricht der Wirbeldichte

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

Darstellung mit Hilfe es ε-Tensors

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k, \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{3} F_i \vec{e}_i$$

alternative Definition:

$$(\vec{n}^\circ \cdot \operatorname{rot} \vec{F})(P) = \lim_{\operatorname{diam} S \to 0} \frac{1}{\operatorname{area} S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit regulären Flächen S mit orientiertem Rand $C: \; t \mapsto \vec{r}(t)$, die den Punkt P enthalten und dort die Normale $\vec{n}$ haben

Laplace-Operator

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

Rechenregeln für Differentialoperatoren

Hintereinanderschaltung

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$

Produkte

- $\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$
- $\operatorname{div}(U\vec{F}) = U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U$
- $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$
- $\operatorname{rot}(U\vec{F}) = U \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$

Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Transformation von Skalar- und Vektorfeldern

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \Phi(\varrho, \varphi, z) \\ \vec{F}(x,y,z) &= F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \Psi_\varrho \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \Psi_z \vec{e}_z = \vec{\Psi}(\varrho, \varphi, z) \end{aligned}$$

auf Zylinderkoordinaten $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, $z = z$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} U &= \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z \\ \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \partial_z \Psi_z \\ \operatorname{rot} \vec{F} &= \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_z - \partial_z \Psi_\varphi \right) \vec{e}_\varrho + \left(\partial_z \Psi_\varrho - \partial_\varrho \Psi_z \right) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\varrho} \left(\partial_\varrho (\varrho \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\varrho \right) \vec{e}_z \\ \Delta U &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \Phi) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi \end{aligned}$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Transformation von Skalar- und Vektorfeldern

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \Phi(r,\vartheta,\varphi) \\ \vec{F}(x,y,z) &= F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z = \Psi_r\vec{e}_r + \Psi_\vartheta\vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi\vec{e}_\varphi = \vec{\Psi}(r,\vartheta,\varphi) \end{aligned}$$

auf Kugelkoordinaten $x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = r\cos\vartheta$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} U &= \partial_r\Phi\vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta\Phi\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Phi\vec{e}_\varphi \\ \operatorname{div}\vec{F} &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Psi_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\Psi_\vartheta\right) \\ \operatorname{rot}\vec{F} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\vartheta\right)\vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\partial_\varphi\Psi_r - \sin\vartheta\partial_r(r\Psi_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\partial_r(r\Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta\Psi_r\right)\vec{e}_\varphi \\ \Delta U &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Phi + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\partial_\vartheta\Phi\right) \end{aligned}$$