8.1 Skalar- und Vektorfelder

Skalarfeld

$$\mathbb{R}^3 \ni P \mapsto U(P) \in \mathbb{R}$$

alternative Schreibweisen: $U = U(x, y, z) = U(\vec{r})$

Visualisierung durch Niveaumengen oder Einschränkungen auf achsenparallele Ebenen

Vektorfeld

$$\mathbb{R}^3 \ni P \mapsto \vec{F}(P) \in \mathbb{R}^3$$

alternative Schreibweisen: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\vec{r})$

Komponenten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems: F_x, F_y, F_z

Visualisierung als Richtungsfeld oder mit Hilfe von Feldlinien

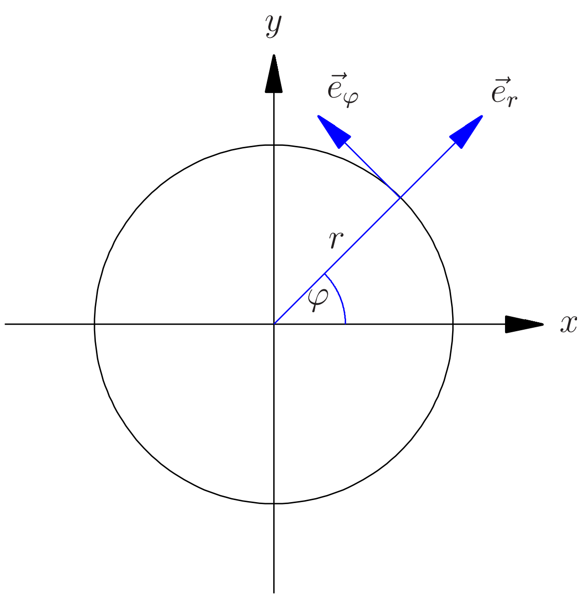
Vektorfelder in Polarkoordinaten

auf den Punkt $(x, y) = (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)$ bezogene orthonormale Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Darstellung

$$\vec{F}(x, y) = \vec{F}(r, \varphi) = F_r\vec{e}_r + F_\varphi\vec{e}_\varphi, \quad F_r = \vec{F}\cdot\vec{e}_r,\ F_\varphi = \vec{F}\cdot\vec{e}_\varphi$$



Vektorfelder in Zylinderkoordinaten

auf den Punkt $(x, y, z) = (\varrho \cos\varphi,\ \varrho \sin\varphi,\ z)$ bezogene orthonormale Basis

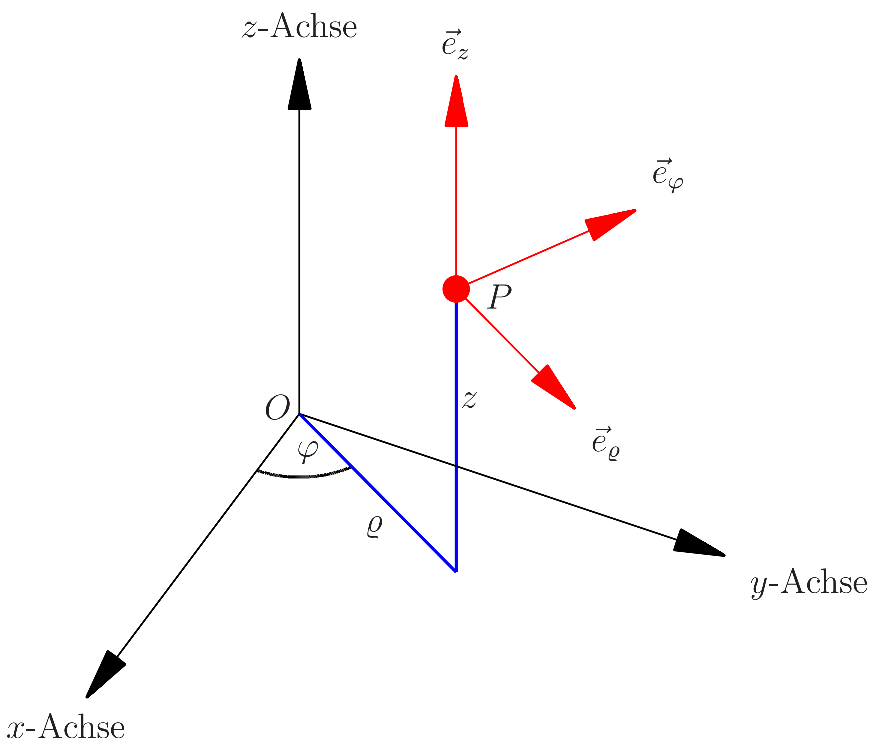
$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Darstellung

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

mit

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho,\ F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi,\ F_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z$$



Vektorfelder in Kugelkoordinaten

auf den Punkt $(x, y, z) = (r \cos\varphi \sin\vartheta,\ r \sin\varphi \sin\vartheta,\ r \cos\vartheta)$ bezogene orthonormale Basis

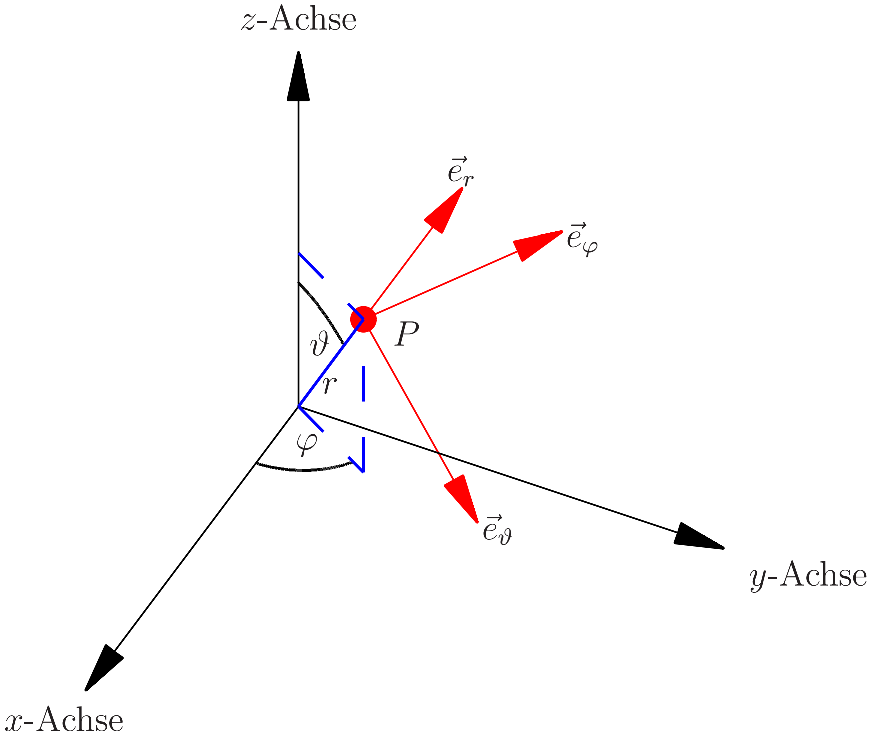
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Darstellung

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r,\ F_\vartheta = \vec{F} \cdot \vec{e}_\vartheta,\ F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi$$



z-Achse
$\vec{e}_r$
$\vec{e}_\varphi$
P
ϑ
r
φ
$\vec{e}_\vartheta$
y-Achse
x-Achse