

Teil 8

Vektoranalysis

8.1 Skalar- und Vektorfelder

Skalarfeld

$$\mathbb{R}^3 \ni P \mapsto U(P) \in \mathbb{R}$$

alternative Schreibweisen: $U = U(x, y, z) = U(\vec{r})$

Visualisierung durch Niveaumengen oder Einschränkungen auf achsenparallele Ebenen

Vektorfeld

$$\mathbb{R}^3 \ni P \mapsto \vec{F}(P) \in \mathbb{R}^3$$

alternative Schreibweisen: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\vec{r})$

Komponenten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems: F_x, F_y, F_z

Visualisierung als Richtungsfeld oder mit Hilfe von Feldlinien

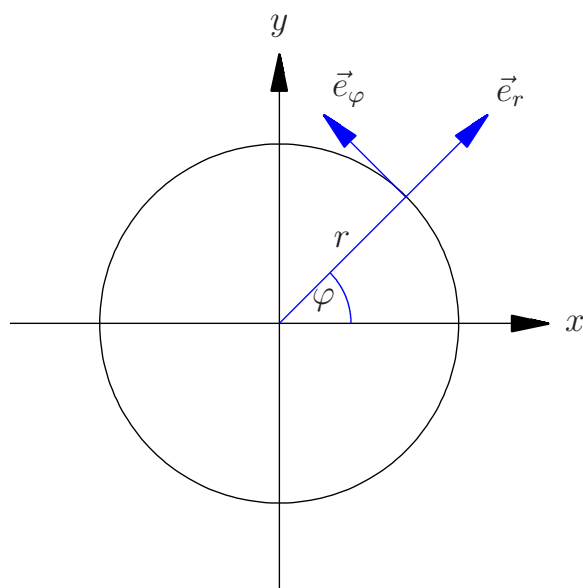
Vektorfelder in Polarkoordinaten

auf den Punkt $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ bezogene orthonormale Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

↔ Darstellung

$$\vec{F}(x, y) = \vec{F}(r, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi, \quad F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi$$



Vektorfelder in Zylinderkoordinaten

auf den Punkt $(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z)$ bezogene orthonormale Basis

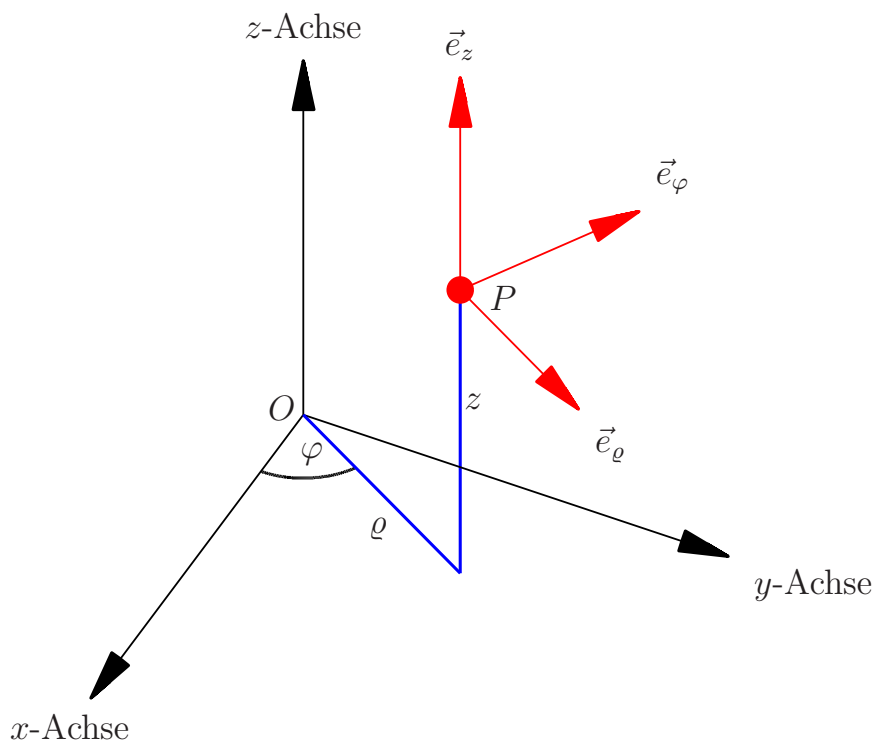
$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↪ Darstellung

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

mit

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad F_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z$$



Vektorfelder in Kugelkoordinaten

auf den Punkt $(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$ bezogene orthonormale Basis

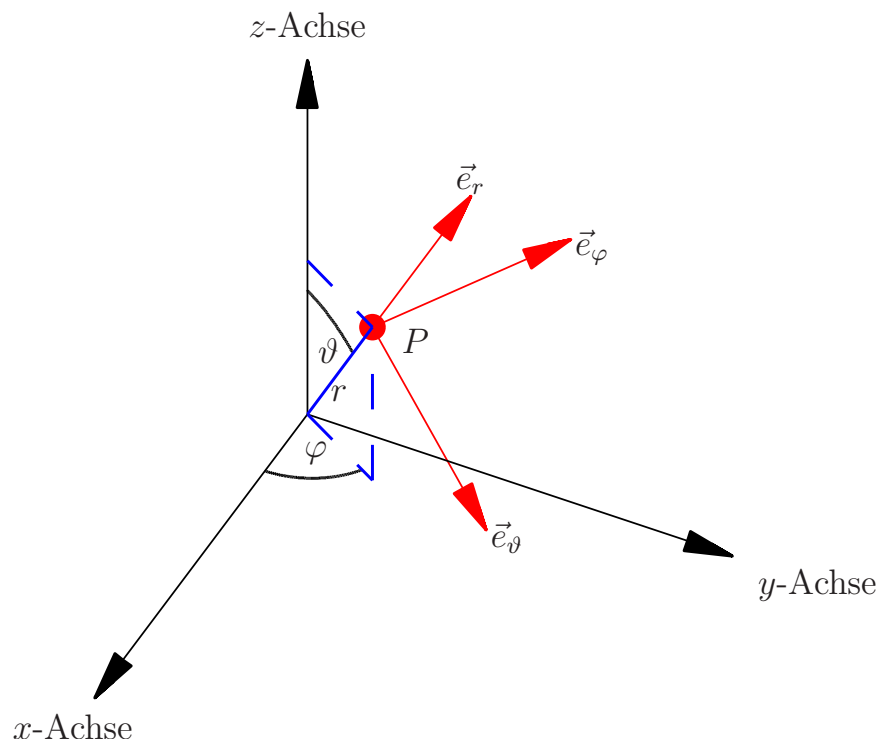
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

↪ Darstellung

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\vartheta = \vec{F} \cdot \vec{e}_\vartheta, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi$$



8.2 Differentialoperatoren

Gradient

$$\text{grad } U = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix} \quad \text{für ein Skalarfeld } U(x, y, z)$$

entspricht Richtung des stärksten Anstiegs

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

alternative Definition:

$$\text{grad } U(P) = \lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S U d\vec{S}$$

mit S der Oberfläche eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V und nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement $d\vec{S}$

Divergenz

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

entspricht der Quelldichte

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

alternative Definition:

$$\text{div } \vec{F}(P) = \lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

mit S der Oberfläche eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V und $d\vec{S}$ dem nach außen orientierten vektoriellen Flächenelement

Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

entspricht der Wirbeldichte

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

Darstellung mit Hilfe des ε -Tensors

$$\left(\text{rot } \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k, \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \vec{e}_i$$

alternative Definition:

$$(\vec{n}^\circ \cdot \text{rot } \vec{F})(P) = \lim_{\text{diam } S \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit regulären Flächen S mit orientiertem Rand $C : t \mapsto \vec{r}(t)$, die den Punkt P enthalten und dort die Normale \vec{n} haben

Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

Rechenregeln für Differentialoperatoren

Hintereinanderschaltung

- $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$
- $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$
- $\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$

Produkte

- $\text{grad}(UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U$
- $\text{div}(U\vec{F}) = U \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U$
- $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$
- $\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$

Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Transformation von Skalar- und Vektorfeldern

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \Psi_\varrho \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \Psi_z \vec{e}_z = \vec{\Psi}(\varrho, \varphi, z)$$

auf Zylinderkoordinaten $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = z$

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z \\ \text{div } \vec{F} &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho(\varrho \Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \partial_z \Psi_z \\ \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_z - \partial_z \Psi_\varphi \right) \vec{e}_\varrho + (\partial_z \Psi_\varrho - \partial_\varrho \Psi_z) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\varrho} (\partial_\varrho(\varrho \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\varrho) \vec{e}_z \\ \Delta U &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho(\varrho \partial_\varrho \Phi) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi \end{aligned}$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Transformation von Skalar- und Vektorfeldern

$$U(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \Psi_r \vec{e}_r + \Psi_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi = \vec{\Psi}(r, \vartheta, \varphi)$$

auf Kugelkoordinaten $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi \\ \text{div } \vec{F} &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\vartheta) \\ \text{rot } \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\vartheta) \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi \Psi_r - \sin \vartheta \partial_r (r \Psi_\varphi)) \vec{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r} (\partial_r (r \Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta \Psi_r) \vec{e}_\varphi \\ \Delta U &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi) \end{aligned}$$

8.3 Integration

Kurvenintegral

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}) |\vec{r}'(t)| dt$$

für eine Kurve $C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$ und ein Skalarfeld $U(x, y, z)$ unabhängig von der Parametrisierung und insbesondere der Orientierung

Weg

Kurve mit festgelegtem Durchlaufsin

$$C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

zusammengesetzte Wege: $C_1 + \dots + C_m$

Weg mit umgekehrtem Durchlaufsin: $-C$

Arbeitsintegral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

für einen Weg $C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$ und ein Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$

bei gleichbleibender Orientierung unabhängig von der Parametrisierung;

Änderung des Vorzeichens bei Umkehrung der Durchlaufrichtung

alternative Schreibweise:

$$\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt, \quad dz = z'(t) dt$$

Flächenintegral

$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

für eine Fläche $S : D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^t$ und ein Skalarfeld $U(x, y, z)$

unabhängig von der Parametrisierung

Flussintegral

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) dudv$$

für eine Parametrisierung $D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^t$ der Fläche S und mit

$$d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS, \quad dS = |\vec{n}(u, v)| dudv$$

dem vektoriellen Flächenelement in Richtung der Normalen $\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$

bei gleicher Orientierung des Normalenvektors unabhängig von der Parametrisierung; Änderung des Vorzeichens bei Umkehrung der Normalenrichtung

Fluss durch einen Funktionsgraph

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy$$

für eine skalare Funktion $z = f(x, y)$ mit Definitionsbereich D und Graph S (Normale mit positiver z -Komponente)

Fluss durch einen Zylindermantel

Randkurve $\varrho = \varrho(\varphi) \rightsquigarrow$

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho dz d\varphi, \quad \vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

(Flussrichtung nach außen)

$\varrho = a$ (Kreiszyylinder) \rightsquigarrow

$$a \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho dz d\varphi$$

Fluss durch eine Kugel

Radius $r = a \rightsquigarrow$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta, \quad \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

radiales Feld $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r \rightsquigarrow$ Fluss $4\pi a^2 f(a)$

8.4 Integralsätze

Orientierter Rand einer Fläche

$$\partial S = C = C_1 + \cdots + C_m$$

S links von C_i , d.h. das Kreuzprodukt aus Normale \vec{n} von S und Tangentenvektor \vec{t} von C zeigt in die Fläche

Satz von Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

mit S der Oberfläche eines Körpers V und $d\vec{S}$ dem nach außen gerichteten vektoriellen Flächenelement

Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß

$$\operatorname{vol}(V) = \frac{1}{3} \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

mit $S = \partial V$ und $d\vec{S}$ dem nach außen gerichteten vektoriellen Flächenelement

Satz von Gauß in der Ebene

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dC = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}, \quad \vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

mit

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y, \quad \vec{F} \times d\vec{r} = F_x y'(t) - F_y x'(t)$$

und $\partial A = C : t \mapsto \vec{r}(t)$ dem orientierten Rand von A

Flächenberechnung mit dem Satz von Gauß

$$\operatorname{area}(A) = \frac{1}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

mit $\partial A = C : t \mapsto \vec{r}(t)$ dem orientierten Rand von A

Satz von Green

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

mit $C : t \mapsto \vec{r}(t)$ dem orientierten Rand von A

Satz von Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit C dem orientierten Rand der Fläche S

8.5 Potentialtheorie

Potential

U Potential von $\vec{F} \Leftrightarrow$

$$\vec{F} = \text{grad } U$$

Arbeitsintegral entspricht Potentialdifferenz

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) = [U]_A^B$$

für jeden Weg $C : t \mapsto \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ von A nach B

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ für geschlossene Wege

Existenz eines Potentials

Existenz eines Potentials \Leftrightarrow Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals \Leftrightarrow

$$U(P) = U(P_0) + \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit $C_P : t \mapsto \vec{r}(t)$ einem beliebigen Weg, der P_0 mit P verbindet

Potential bis auf eine Konstante eindeutig

Integrabilitätsbedingung

$$\vec{F} = \text{grad } U \quad \Longrightarrow \quad \text{rot } \vec{F} = 0$$

Umkehrung gültig für einfach zusammenhängende Gebiete

Konstruktion eines Potentials

$$\text{grad } U = \vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^t$$

Integration von F_x bzgl. $x \rightsquigarrow$

$$U(x, y, z) = \int F_x dx = U_1(x, y, z) + C_1(y, z)$$

Integration von $F_y = \partial_y U = \partial_y U_1 + \partial_y C_1$ bzgl. $y \rightsquigarrow$

$$C_1(y, z) = \int (F_y - \partial_y U_1) dy = U_2(y, z) + C_2(z)$$

Integration von $F_z = \partial_z U = \partial_z U_1 + \partial_z U_2 + \partial_z C_2$ bzgl. $z \rightsquigarrow$

$$C_2(z) = \int (F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2) dz = U_3(z) + c$$

Hakenintegral

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^t = \text{grad } U \rightsquigarrow$$

$$U(Q) = U(P) + \int_{p_1}^{q_1} F_x(x, p_2, p_3) dx + \int_{p_2}^{q_2} F_y(q_1, y, p_3) dy + \int_{p_3}^{q_3} F_z(q_1, q_2, z) dz$$

analoge Integrale bei Permutation der Koordinaten

Vektorpotential

\vec{A} Vektorpotential von $\vec{F} \Leftrightarrow$

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A}$$

Existenz eines Vektorpotentials

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A} \implies \text{div } \vec{F} = 0$$

Umkehrung gültig auf einfach zusammenhängendem Gebiet

Vektorpotential bis auf ein Gradientenfeld eindeutig bestimmt:

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \implies \vec{B} = \vec{A} + \text{grad } U$$

$$-\Delta U = \text{div } \vec{A} \text{ (Eichung)} \rightsquigarrow \text{div } \vec{B} = 0$$

Konstruktion eines Vektorpotentials

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \end{pmatrix}$$

analoge Formeln durch zyklisches Vertauschen der Variablen