7.3 Kurven- und Flächenintegrale

Kurvenintegral

$$\int\limits_C f = \int\limits_a^b f(p(t))|p'(t)|\,dt$$

für eine reguläre Parametrisierung $t \to p(t) \in \mathbb{R}^n$, $p'(t) \neq 0$

unabhängig von der Parametrisierung

$f = 1 \rightsquigarrow$ Länge von C

Eigenschaften des Kurvenintegrals

- linear:
$$\int\limits_C \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_C f + \beta \int\limits_C g$$
- additiv:
$$\int\limits_C f\,dC = \int\limits_{C_1} f + \int\limits_{C_2} f, \quad C = C_1 \dot{\cup} C_2$$

Länge einer Kurve

Die Länge L einer Kurve mit stetig differenzierbarer Parametrisierung $t \mapsto p(t)$, $a \leq t \leq b$, ist

$$\int_a^b |p'(t)|\,dt\,.$$

Speziell gilt für eine Kurve in der xy-Ebene mit der Parameterdarstellung $p(t) = (x(t), y(t))$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\,.$$

Insbesondere hat der Graph einer Funktion $y = f(x)$, $x \in [c, d]$ die Länge

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

Die Länge des Kurvenstücks zwischen $p(a)$ und $p(t)$,

$$s(t) = \int\limits_a^t |p'(\tau)|\,d\tau\,,$$

kann als kanonischer Kurvenparameter benutzt werden. Man erhält die sogenannte Parametrisierung nach Bogenlänge:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

Aufgrund des normierten Tangentenvektors gilt für diese kanonische Parametrisierung

$$\int\limits_C f = \int\limits_0^L f(q(s))\,ds$$

mit L der Länge von C.

Reguläre Parametrisierung eines Flächenstücks

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit einer im Inneren von R bijektiven Abbildung s und linear unabhängigen Vektoren $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$, $x \in \overset{\circ}{R}$

Tangentialebene: aufgespannt durch $\partial_k s(x)$

Flächennormale: Einheitsvektor $\xi(x) \perp \partial_k(x)$

Flächenintegral

$$\int\limits_S f\, dS = \int\limits_R (f \circ s)\, |\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR$$

mit $s:\ R \ni (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_n) \in S$ einer regulären Parametrisierung und $\xi(x)$ der (normierten) Flächennormale

Skalierungsfaktor der Flächenelemente:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR$$

$f = 1 \rightsquigarrow$ Flächeninhalt von S

Flächenelement in Zylinderkoordinaten

$$\int\limits_S f\ dS = \int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int\limits_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi, z)\ \varrho\, d\varphi\, dz$$

für einen Zylindermantel $S:\ (\varphi, z) \mapsto (\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi, z)$

Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$\int\limits_S f\ dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} f(R, \vartheta, \varphi)\, R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

für eine Sphäre $S:\ (\vartheta, \varphi) \mapsto (R \sin\vartheta \cos\varphi, R \sin\vartheta \sin\varphi, R \cos\vartheta)$