

7.2 Variablentransformation

Transformation mehrdimensionaler Integrale

$$\int_U f \circ g |\det g'| dU = \int_V f dV, \quad V = g(U),$$

für eine bijektive Transformation g mit $\det g'(x) \neq 0, x \in U$

Spalten von g' orthogonal \implies

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|$$

$y = g(x) = Ax + b$ (affine Transformation) \implies

$$dy = |\det A| dx$$

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z \quad \implies \quad dx dy dz = \varrho d\varrho d\varphi dz$$

Integral über einen Zylinder $Z : 0 \leq \varrho \leq \varrho_0, 0 \leq z \leq z_0$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho_0} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varrho d\varphi dz$$

Volumenelement in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta \quad \implies \quad dx dy dz = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Integral über eine Kugel $K : 0 \leq r \leq R$

$$\int_K f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R f(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$