7.1 Mehrdimensionale Integrale

Simplex

konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, \ldots, p_n$ in $\mathbb{R}^n$

$$S = \{x = \sum_k \alpha_k p_k \ : \ \sum_k \alpha_k = 1,\ \alpha_k \geq 0\}$$

Volumen

$$\operatorname{vol} S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0)|$$

Parallelepiped

aufgespannt von linear unabhängigen Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathbb{R}^n$

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i : \ 0 \leq \alpha_i \leq 1\}$$

Volumen

$$\operatorname{vol} P = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

Integrationsbereich

Elementarbereich:
begrenzt durch Graphen stetiger Funktionen nach geeigneter orthogonaler Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}
&a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\
&a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1) \\
&\vdots \\
&a_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b_n(x_1, \ldots, x_{n-1})
\end{aligned}$$

regulärer Bereich:
bis auf Randkurven bzw. -flächen disjunkte endliche Vereinigung von Elementarbereichen

Mehrdimensionales Integral

Grenzwert von Riemann-Summen über regulärem Bereich

$$\int\limits_V f\, dV = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i f(P_i) \Delta V_i, \quad \Delta V_i = \operatorname{vol}(V_i),\ P_i \in V_i\,,$$

mit $|\Delta|$ dem maximalen Durchmesser der V_i (i.a. Simplizes oder Parallelepipede)

alternative Schreibweisen: $\int\limits_V f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,\ \int_V f$

Satz von Fubini

Integral über Elementarbereich $V: a_j(x_1, \ldots, x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$

$$\int\limits_V f\, dV = \int\limits_{a_1}^{b_1} \int\limits_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \cdots dx_2 dx_1$$

unabhängig von der Reihenfolge der Variablen, z.B.

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\; dydx = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\; dxdy$$