Teil 7

Mehrdimensionale Integration

7.1 Mehrdimensionale Integrale

Simplex

konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, \ldots, p_n$ in $\mathbb{R}^n$

$$S = \{x = \sum_k \alpha_k p_k \, : \, \sum_k \alpha_k = 1, \; \alpha_k \geq 0\}$$

Volumen

$$\operatorname{vol} S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0)|$$

Parallelepiped

aufgespannt von linear unabhängigen Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathbb{R}^n$

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i : \; 0 \leq \alpha_i \leq 1\}$$

Volumen

$$\operatorname{vol} P = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

Integrationsbereich

Elementarbereich:
begrenzt durch Graphen stetiger Funktionen nach geeigneter orthogonaler Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}
&a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\
&a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1) \\
&\vdots \\
&a_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b_n(x_1, \ldots, x_{n-1})
\end{aligned}$$

regulärer Bereich:
bis auf Randkurven bzw. -flächen disjunkte endliche Vereinigung von Elementarbereichen

Mehrdimensionales Integral

Grenzwert von Riemann-Summen über regulärem Bereich

$$\int\limits_V f \, dV = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i f(P_i) \Delta V_i, \quad \Delta V_i = \operatorname{vol}(V_i), \; P_i \in V_i \, ,$$

mit $|\Delta|$ dem maximalen Durchmesser der V_i (i.a. Simplizes oder Parallelepipede)

alternative Schreibweisen: $\int\limits_V f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n, \; \int_V f$

Satz von Fubini

Integral über Elementarbereich $V: a_j(x_1, \ldots, x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$

$$\int\limits_V f\,dV = \int\limits_{a_1}^{b_1} \int\limits_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n \cdots dx_2 dx_1$$

unabhängig von der Reihenfolge der Variablen, z.B.

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\;dydx = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\;dxdy$$

7.2 Variablentransformation

Transformation mehrdimensionaler Integrale

$$\int_U f \circ g \, |\det g'| \, dU = \int_V f \, dV, \quad V = g(U)\,,$$

für eine bijektiveTransformation g mit $\det g'(x) \neq 0$, $x \in U$

Spalten von g' orthogonal $\implies$

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|$$

$y = g(x) = Ax + b$ (affine Transformation) $\implies$

$$dy = |\det A| \, dx$$

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi, \quad z = z \qquad \implies \qquad dx\,dy\,dz = \varrho d\varrho\,d\varphi\,dz$$

Integral über einen Zylinder $Z:\ 0 \le \varrho \le \varrho_0,\ 0 \le z \le z_0$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho_0} f(\varrho, \varphi, z)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz$$

Volumenelement in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta \qquad \implies \qquad dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Integral über eine Kugel $K:\ 0 \le r \le R$

$$\int\limits_K f = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{R} f(r, \vartheta, \varphi)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

7.3 Kurven- und Flächenintegrale

Kurvenintegral

$$\int\limits_C f = \int\limits_a^b f(p(t))|p'(t)|\,dt$$

für eine reguläre Parametrisierung $t \to p(t) \in \mathbb{R}^n$, $p'(t) \neq 0$

unabhängig von der Parametrisierung

$f = 1 \rightsquigarrow$ Länge von C

Eigenschaften des Kurvenintegrals

- linear:
$$\int\limits_C \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_C f + \beta \int\limits_C g$$
- additiv:
$$\int\limits_C f\,dC = \int\limits_{C_1} f + \int\limits_{C_2} f, \quad C = C_1 \dot\cup C_2$$

Länge einer Kurve

Die Länge L einer Kurve mit stetig differenzierbarer Parametrisierung $t \mapsto p(t)$, $a \leq t \leq b$, ist

$$\int_a^b |p'(t)|\,dt\,.$$

Speziell gilt für eine Kurve in der xy-Ebene mit der Parameterdarstellung $p(t) = (x(t), y(t))$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\,.$$

Insbesondere hat der Graph einer Funktion $y = f(x)$, $x \in [c, d]$ die Länge

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

Die Länge des Kurvenstücks zwischen $p(a)$ und $p(t)$,

$$s(t) = \int\limits_a^t |p'(\tau)|\,d\tau\,,$$

kann als kanonischer Kurvenparameter benutzt werden. Man erhält die sogenannte Parametrisierung nach Bogenlänge:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

Aufgrund des normierten Tangentenvektors gilt für diese kanonische Parametrisierung

$$\int\limits_C f = \int\limits_0^L f(q(s))\,ds$$

mit L der Länge von C.

Reguläre Parametrisierung eines Flächenstücks

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit einer im Inneren von R bijektiven Abbildung s und linear unabhängigen Vektoren $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$, $x \in \mathring{R}$

Tangentialebene: aufgespannt durch $\partial_k s(x)$

Flächennormale: Einheitsvektor $\xi(x) \perp \partial_k(x)$

Flächenintegral

$$\int\limits_S f\, dS = \int\limits_R (f \circ s)\, |\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR$$

mit $s: R \ni (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_n) \in S$ einer regulären Parametrisierung und $\xi(x)$ der (normierten) Flächennormale

Skalierungsfaktor der Flächenelemente:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR$$

$f = 1 \rightsquigarrow$ Flächeninhalt von S

Flächenelement in Zylinderkoordinaten

$$\int\limits_S f\ dS = \int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int\limits_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi, z)\ \varrho\, d\varphi\, dz$$

für einen Zylindermantel $S: (\varphi, z) \mapsto (\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi, z)$

Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$\int\limits_S f\ dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} f(R, \vartheta, \varphi)\, R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

für eine Sphäre $S: (\vartheta, \varphi) \mapsto (R \sin\vartheta \cos\varphi, R \sin\vartheta \sin\varphi, R \cos\vartheta)$

7.4 Anwendungen

Schwerpunkt

Masse eines Körpers K mit Dichte ϱ

$$m = \int\limits_K \varrho(x)\, dK$$

ν-te Koordinate des Massenschwerpunktes

$$s_\nu = m^{-1} \int\limits_K x_\nu \varrho(x)\, dK$$

$\varrho(x) = 1 \rightsquigarrow$ geometrischer Schwerpunkt

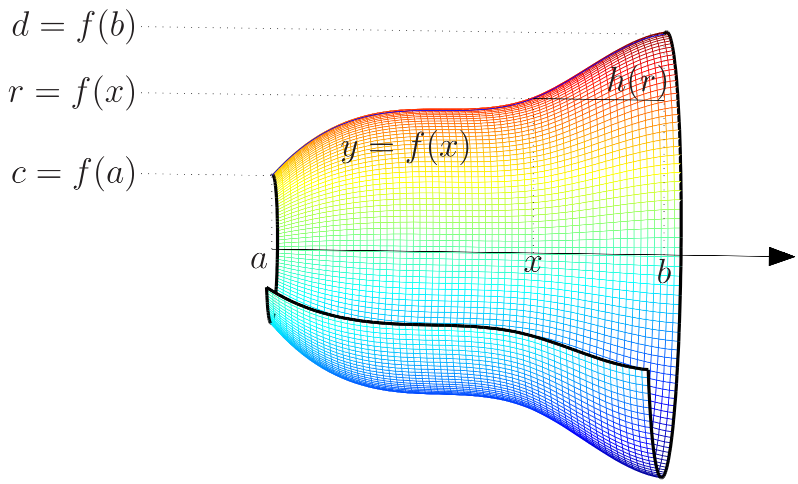
Trägheitsmoment

$$I = \int_K \operatorname{dist}(x, g)^2 \varrho(x)\, dK$$

mit dist der Abstandsfunktion, g der Achse und ϱ der Dichte

Volumen von Rotationskörpern

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b f(x)^2\, dx \\ &= \pi c^2 (b-a) + 2\pi \int_c^d r h(r)\, dr \end{aligned}$$



7.5 Integralsätze

Hauptsatz für Mehrfachintegrale

$$\int\limits_V \partial_\nu f = \int\limits_{\partial V} f\,\xi_\nu \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_V \operatorname{grad} f = \int\limits_{\partial V} f\,\xi$$

mit ξ der nach außen gerichteten Einheitsnormalen von ∂V

Mypartielle Integration bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

$$\int_V f\,(\partial_\nu g) = \int_{\partial V} f\,g\,\xi_\nu - \int_V (\partial_\nu f)\,g$$

mit ξ der nach außen gerichteten Einheitsnormalen von ∂V

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g\,\partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,\partial^\alpha g$$

für glatte Funktionen, die ausserhalb einer beschränkten Menge verschwinden oder genügend schnell abfallen

Greensche Integralformeln

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial V} f\,\partial_\perp g &= \int\limits_V (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}}\ \operatorname{grad} g + f\,\Delta g \\ \int\limits_{\partial V} f\partial_\perp g - g\partial_\perp f &= \int\limits_V f\Delta g - g\Delta f \end{aligned}$$

mit $\partial_\perp g$ der Ableitung in Richtung der nach außen zeigenden Einheitsnormalen ξ von ∂V

$f = 1 \rightsquigarrow$

$$\int\limits_{\partial V} \partial_\perp g = \int\limits_V \Delta g$$