6.8 Extremwerte

Kritischer Punkt

$\operatorname{grad} f(x_*) = 0$, Typbestimmung mit Eigenwerten λ_k der Hesse-Matrix $Hf(x_*)$

- Flachpunkt: $\lambda_k = 0$
- elliptischer Punkt: $\lambda_k \neq 0$, gleiches Vorzeichen
- hyperbolischer Punkt: $\exists\ \lambda_k$ mit verschiedenem Vorzeichen
- parabolischer Punkt: λ_k gleiches Vorzeichen, mindestens ein λ_k null

Extrema multivariater Funktionen

innerer Punkt:
x_* lokales Extremum $\implies$

$$\operatorname{grad}\ f(x_*) = 0$$

Minimum (Maximum), falls Eigenwerte der Hesse-Matrix H positiv (negativ)

bei zwei Variablen: $\det H > 0$ und $\operatorname{Spur} H > 0$ (< 0)

Randpunkt:
Richtungsableitung $\partial_v f(x_*) > 0$ (< 0) für jede ins Innere zeigende Richtung v

Lagrange-Multiplikatoren

x_* lokale Extremstelle von f unter den Nebenbedingungen $g_k(x) = 0$,
$\operatorname{Rang} g'(x_*)$ maximal $\implies$
$\exists$ Lagrange-Multiplikatoren λ_k mit

$$f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)$$

Kuhn-Tucker-Bedingung

x_* lokales Minimum von f unter den Nebenbedingungen $g_i(x) \geq 0$,
Gradienten der aktiven Gleichungen linear unabhängig $\implies$
$\exists$ Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_k \geq 0$ mit

$$\operatorname{grad} f(x_*) = \sum_k \lambda_k\ \operatorname{grad}\ g_k(x_*) \quad \wedge \quad \sum_k \lambda_k g_k(x_*) = 0$$

($\lambda_k \leq 0$ bei lokalem Maximum)