6.7 Anwendungen

Umkehrfunktion

$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f'(x_*)$ invertierbar $\implies$
f in Umgebung U von x_* bijektiv, $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, und

$$g'(y) = f'(x)^{-1}, \quad x \in U$$

Implizite Funktionen

$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(x_*, y_*) = 0$ mit $\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \implies$
Gleichungen

$$f_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

lokal nach x auflösbar: $x = \varphi(y)$, $y \approx y_*$

Jacobi-Matrix

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y$$

Fehlerfortpflanzung bei multivariaten Funktionen

absoluter Fehler

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n$$

relativer Fehler

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

mit den Konditionszahlen

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|}$$

Steilster Abstieg

iterative Minimierung multivariater Funktionen

$$x \to y: \qquad f(y) = \min_{t \geq 0} f(x + td), \quad d = -\operatorname{grad} f(x)$$

Konvergenz gegen kritische Punkte: $\operatorname{grad} f(x_*) = 0$

Multivariates Newton-Verfahren

nichtlineares Gleichungssystem

$$f_1(x_*) = \cdots = f_n(x_*) = 0, \quad x_* \in \mathbb{R}^n$$

iterative Approximation der Lösung x_*

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - \Delta x, \quad f'(x_{\text{alt}})\Delta x = f(x_{\text{alt}})$$

$\det f'(x_*) \neq 0 \implies$ lokal quadratische Konvergenz

$$|x_{\text{neu}} - x_*| \leq c\, |x_{\text{alt}} - x_*|^2$$