6.6 Lineare Approximation und Taylor-Entwicklung

Tangente

Kurve $C:\ t \mapsto f(t)$

$f'(t_0) \neq 0 \rightsquigarrow$ berührende Gerade

$$g:\ f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

$f'(t_0) = 0 \rightsquigarrow$ abrupte Änderung der Tangentenrichtung möglich

Tangentialebene

implizit definierte Fläche

$$S:\ f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = c$$

$\operatorname{grad} f(p) \neq 0 \rightsquigarrow$ Tangentialebene

$$E:\ \left(\operatorname{grad} f(p)\right)^{\mathrm{t}}\ (x - p) = 0$$

Tangentialebene für den Graph einer Funktion $x \mapsto y = g\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right)$

$$E:\ y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\left(x_i - q_i\right)$$

Multivariate Taylor-Approximation

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R, \quad |x - a| < r\,,$$

mit $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$

Restglied

$$R = \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u)(x-a)^\alpha, \quad u = a + \theta(x - a)\,,$$

für ein $\theta \in [0, 1]$

Hesse-Matrix

quadratische Taylor-Approximation einer skalaren Funktion f

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(a) + \left(\operatorname{grad} f(a)\right)^{\mathrm{t}}(x - a) + \frac{1}{2}(x-a)^t\, \mathrm{H}\, f(a)(x-a) + \cdots$$

mit

$$\mathrm{H}\, f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}$$