6.4 Partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \partial_i f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + h, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{h}$$

Ableitung der univariaten Funktion $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, bei der die Variablen x_j, $j \neq i$, als Konstanten betrachtet werden

Mehrfache partielle Ableitungen

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Multiindex-Notation

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\, \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i$ für glatte Funktionen f

Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion f stetig, so gilt

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f\,.$$

Für hinreichend glatte Funktionen ist also die Reihenfolge partieller Ableitungen vertauschbar. Insbesondere rechtfertigt dies die Multiindex-Schreibweise.

Totale Ableitung und Jacobi-Matrix

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(|h|), \quad |h| \to 0$$

Jacobi-Matrix

$$f' = \mathrm{J}\, f = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \ldots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \ldots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$$

Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$