6.3 Konvergenz

Konvergenz einer Vektor-Folge

$\lim_{k\to\infty} x_k = x$ bzw. $x_k \to x$ für $k \to \infty \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_\varepsilon : \; |x_k - x| < \varepsilon \quad \text{für } k > k_\varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ Konvergenz aller Komponenten

Cauchy-Kriterium für Vektor-Folgen

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_\varepsilon : \; |x_\ell - x_k| < \varepsilon \quad \text{für } \ell, k > k_\varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ Cauchy-Konvergenz aller Komponenten

Kontrahierende Abbildung

$$g : D \to D, \qquad \|g(x) - g(y)\| \le c \, \|x - y\| \quad \forall x, y \in D$$

mit Kontraktionskonstante $c < 1$

für konvexe Mengen

$$c \le \sup_{x \in D} ||g'(x)||$$

mit g' der Jacobi-Matrix

Banachscher Fixpunktsatz

g: kontrahierende Selbstabbildung einer nichtleeren abgeschlossenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, d.h.

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \implies g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

mit $c < 1$

$\implies$ Existenz eines eindeutigen Fixpunktes $x_* = g(x_*) \in D$

lineare Konvergenz einer Iterationsfolge (x_ℓ)

$$\|x_* - x_\ell\| \le \frac{c^\ell}{1 - c} \, \|x_1 - x_0\|$$