6.2 Funktionen

Multivariate Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x)$$

skalar- $(m = 1)$ oder vektorwertig $(m > 1)$

Graph: $\{(x, f(x)) :\ x \in D\}$

Niveauflächen: $\{x \in D :\ f(x) = c\}$

Multivariate Polynome

$$p(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

totaler Grad $\le m$: $\sum \alpha \le m$, Dimension $\binom{m+n}{n}$

maximaler Grad $\le m$: $\max_k \alpha_k \le m$, Dimension $(m+1)^n$

homogen vom Grad m: $\sum \alpha = m$, Dimension $\binom{m+n-1}{n-1}$

Stetigkeit multivariater Funktionen

$$D \ni x_k \to x \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$$

Extremwerte stetiger Funktionen

Existenz von Minimum und Maximum auf einer kompakten Menge

Äquivalenz von Vektornormen

$$c_1\|x\| \le |x| \le c_2\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Lipschitz-Stetigkeit

$$||f(x) - f(y)|| \le c||x - y|| \quad \forall\, x, y \in D$$

für konvexe Mengen

$$c \le \sup_{x\in D} |f'(x)|$$

kontrahierend: $c < 1$