

## 6.1 Topologie von Mengen

### Umgebung

$\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$$

Umgebung  $U$  von  $x$ : Menge, die eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  enthält

### Offene Menge

$D$  offen

$\Leftrightarrow$  jeder Punkt in  $D$  besitzt eine Umgebung in  $D$

$\Leftrightarrow$  Komplement von  $D$  abgeschlossen

Inneres  $\overset{\circ}{D}$  einer (beliebigen) Menge  $D$ : alle Punkte in  $D$  mit einer Umgebung in  $D$

### Abgeschlossene Menge

$D$  abgeschlossen

$\Leftrightarrow$  jede konvergente Folge von Punkten in  $D$  besitzt einen Grenzwert in  $D$

$\Leftrightarrow$  Komplement von  $D$  offen

Abschluss  $\bar{D}$  einer (beliebigen) Menge  $D$ : Menge aller Grenzwerte von Folgen in  $D$

### Rand einer Menge

$$\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D}$$

Punkte, die keine Umgebung besitzen, die ganz in  $D$  oder im Komplement von  $D$  liegt

### Kompakte Menge

kompakt  $\Leftrightarrow$  beschränkt und abgeschlossen

äquivalente Charakterisierungen

- Jede Folge in  $D$  besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $D$ .
- Jede Überdeckung von  $D$  mit offenen Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung.