Teil 6

Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

6.1 Topologie von Mengen

Umgebung

ε-Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$$

Umgebung U von x: Menge, die eine ε-Umgebung von x enthält

Offene Menge

D offen

$\Leftrightarrow$ jeder Punkt in D besitzt eine Umgebung in D

$\Leftrightarrow$ Komplement von D abgeschlossen

Inneres $\mathring{D}$ einer (beliebigen) Menge D: alle Punkte in D mit einer Umgebung in D

Abgeschlossene Menge

D abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ jede konvergente Folge von Punkten in D besitzt einen Grenzwert in D

$\Leftrightarrow$ Komplement von D offen

Abschluss $\overline{D}$ einer (beliebigen) Menge D: Menge aller Grenzwerte von Folgen in D

Rand einer Menge

$$\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$$

Punkte, die keine Umgebung besitzen, die ganz in D oder im Komplement von D liegt

Kompakte Menge

kompakt $\Leftrightarrow$ beschränkt und abgeschlossen

äquivalente Charakterisierungen

- Jede Folge in D besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in D.
- Jede Überdeckung von D mit offenen Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

6.2 Funktionen

Multivariate Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x)$$

skalar- $(m = 1)$ oder vektorwertig $(m > 1)$

Graph: $\{(x, f(x)) : \; x \in D\}$

Niveauflächen: $\{x \in D : \; f(x) = c\}$

Multivariate Polynome

$$p(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \, \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

totaler Grad $\leq m$: $\sum \alpha \leq m$, Dimension $\binom{m+n}{n}$

maximaler Grad $\leq m$: $\max_k \alpha_k \leq m$, Dimension $(m+1)^n$

homogen vom Grad m: $\sum \alpha = m$, Dimension $\binom{m+n-1}{n-1}$

Stetigkeit multivariater Funktionen

$$D \ni x_k \to x \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x)$$

Extremwerte stetiger Funktionen

Existenz von Minimum und Maximum auf einer kompakten Menge

Äquivalenz von Vektornormen

$$c_1 \|x\| \leq |x| \leq c_2 \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Lipschitz-Stetigkeit

$$||f(x) - f(y)|| \leq c||x - y|| \quad \forall \, x, y \in D$$

für konvexe Mengen

$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)|$$

kontrahierend: $c < 1$

6.3 Konvergenz

Konvergenz einer Vektor-Folge

$\lim_{k\to\infty} x_k = x$ bzw. $x_k \to x$ für $k \to \infty \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_\varepsilon : \; |x_k - x| < \varepsilon \quad \text{für } k > k_\varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ Konvergenz aller Komponenten

Cauchy-Kriterium für Vektor-Folgen

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_\varepsilon : \; |x_\ell - x_k| < \varepsilon \quad \text{für } \ell, k > k_\varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ Cauchy-Konvergenz aller Komponenten

Kontrahierende Abbildung

$$g : D \to D, \qquad \|g(x) - g(y)\| \le c \, \|x - y\| \quad \forall x, y \in D$$

mit Kontraktionskonstante $c < 1$

für konvexe Mengen

$$c \le \sup_{x \in D} ||g'(x)||$$

mit g' der Jacobi-Matrix

Banachscher Fixpunktsatz

g: kontrahierende Selbstabbildung einer nichtleeren abgeschlossenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, d.h.

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \implies g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

mit $c < 1$

$\implies$ Existenz eines eindeutigen Fixpunktes $x_* = g(x_*) \in D$

lineare Konvergenz einer Iterationsfolge (x_ℓ)

$$\|x_* - x_\ell\| \le \frac{c^\ell}{1 - c} \, \|x_1 - x_0\|$$

6.4 Partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \partial_i f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + h, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{h}$$

Ableitung der univariaten Funktion $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, bei der die Variablen x_j, $j \neq i$, als Konstanten betrachtet werden

Mehrfache partielle Ableitungen

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Multiindex-Notation

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\, \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i$ für glatte Funktionen f

Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion f stetig, so gilt

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f\,.$$

Für hinreichend glatte Funktionen ist also die Reihenfolge partieller Ableitungen vertauschbar. Insbesondere rechtfertigt dies die Multiindex-Schreibweise.

Totale Ableitung und Jacobi-Matrix

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + o(|h|), \quad |h| \to 0$$

Jacobi-Matrix

$$f' = \mathrm{J}\, f = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \ldots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \ldots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$$

Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

6.5 Ableitungsregeln

Multivariate Kettenregel

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y)$$

Hintereinanderschaltung $\rightsquigarrow$ Multiplikation der Jacobi-Matrizen

$$h'(x) = g'(y)f'(x), \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$$

Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} = \left(\frac{d}{dt} f(x+tv)\right)_{t=0} = f'(x)v$$

bei skalarer Funktion: Anstieg von f in Richtung v, maximal für $v \parallel \operatorname{grad} f$

6.6 Lineare Approximation und Taylor-Entwicklung

Tangente

Kurve $C:\ t \mapsto f(t)$

$f'(t_0) \neq 0 \rightsquigarrow$ berührende Gerade

$$g:\ f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

$f'(t_0) = 0 \rightsquigarrow$ abrupte Änderung der Tangentenrichtung möglich

Tangentialebene

implizit definierte Fläche

$$S:\ f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = c$$

$\operatorname{grad} f(p) \neq 0 \rightsquigarrow$ Tangentialebene

$$E:\ \left(\operatorname{grad} f(p)\right)^{\mathrm{t}}\ (x - p) = 0$$

Tangentialebene für den Graph einer Funktion $x \mapsto y = g\left(x_1\,, \ldots\,, x_{n-1}\right)$

$$E:\ y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\left(x_i - q_i\right)$$

Multivariate Taylor-Approximation

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x - a)^\alpha + R, \quad |x - a| < r\,,$$

mit $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$

Restglied

$$R = \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u)(x - a)^\alpha, \quad u = a + \theta(x - a)\,,$$

für ein $\theta \in [0, 1]$

Hesse-Matrix

quadratische Taylor-Approximation einer skalaren Funktion f

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(a) + \left(\operatorname{grad} f(a)\right)^{\mathrm{t}}(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^t\, \mathrm{H}\, f(a)(x - a) + \cdots$$

mit

$$\mathrm{H}\, f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

6.7 Anwendungen

Umkehrfunktion

$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f'(x_*)$ invertierbar $\implies$
f in Umgebung U von x_* bijektiv, $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, und

$$g'(y) = f'(x)^{-1}, \quad x \in U$$

Implizite Funktionen

$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(x_*, y_*) = 0$ mit $\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \implies$
Gleichungen

$$f_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

lokal nach x auflösbar: $x = \varphi(y)$, $y \approx y_*$

Jacobi-Matrix

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y$$

Fehlerfortpflanzung bei multivariaten Funktionen

absoluter Fehler

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n$$

relativer Fehler

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

mit den Konditionszahlen

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|}$$

Steilster Abstieg

iterative Minimierung multivariater Funktionen

$$x \to y: \qquad f(y) = \min_{t \geq 0} f(x + td), \quad d = -\operatorname{grad} f(x)$$

Konvergenz gegen kritische Punkte: $\operatorname{grad} f(x_*) = 0$

Multivariates Newton-Verfahren

nichtlineares Gleichungssystem

$$f_1(x_*) = \cdots = f_n(x_*) = 0, \quad x_* \in \mathbb{R}^n$$

iterative Approximation der Lösung x_*

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - \Delta x, \quad f'(x_{\text{alt}})\Delta x = f(x_{\text{alt}})$$

$\det f'(x_*) \neq 0 \implies$ lokal quadratische Konvergenz

$$|x_{\text{neu}} - x_*| \leq c\, |x_{\text{alt}} - x_*|^2$$

6.8 Extremwerte

Kritischer Punkt

$\operatorname{grad} f(x_*) = 0$, Typbestimmung mit Eigenwerten λ_k der Hesse-Matrix $Hf(x_*)$

- Flachpunkt: $\lambda_k = 0$
- elliptischer Punkt: $\lambda_k \neq 0$, gleiches Vorzeichen
- hyperbolischer Punkt: $\exists\ \lambda_k$ mit verschiedenem Vorzeichen
- parabolischer Punkt: λ_k gleiches Vorzeichen, mindestens ein λ_k null

Extrema multivariater Funktionen

innerer Punkt:
x_* lokales Extremum $\implies$

$$\operatorname{grad}\ f(x_*) = 0$$

Minimum (Maximum), falls Eigenwerte der Hesse-Matrix H positiv (negativ)

bei zwei Variablen: $\det H > 0$ und $\operatorname{Spur} H > 0$ (< 0)

Randpunkt:
Richtungsableitung $\partial_v f(x_*) > 0$ (< 0) für jede ins Innere zeigende Richtung v

Lagrange-Multiplikatoren

x_* lokale Extremstelle von f unter den Nebenbedingungen $g_k(x) = 0$,
$\operatorname{Rang} g'(x_*)$ maximal $\implies$
$\exists$ Lagrange-Multiplikatoren λ_k mit

$$f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)$$

Kuhn-Tucker-Bedingung

x_* lokales Minimum von f unter den Nebenbedingungen $g_i(x) \geq 0$,
Gradienten der aktiven Gleichungen linear unabhängig $\implies$
$\exists$ Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_k \geq 0$ mit

$$\operatorname{grad} f(x_*) = \sum_k \lambda_k\ \operatorname{grad}\ g_k(x_*) \quad \wedge \quad \sum_k \lambda_k g_k(x_*) = 0$$

($\lambda_k \leq 0$ bei lokalem Maximum)