5.9 Normalformen

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

Eigenvektoren: Spalten der Fourier-Matrix

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

Diagonalform

$$\frac{1}{n}\overline{W}\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, n-1$$

Unitäre Diagonalisierung

A normal, d.h. $A^*A = AA^*$ $\quad \Leftrightarrow$

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

mit einer unitären Matrix U (Spalten: orthonormale Basis aus Eigenvektoren)

Diagonalisierung hermitescher Matrizen

$A = A^* \implies$ reelle Eigenwerte und Orthonormalbasis aus Eigenvektoren u_k

$$U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad U = (u_1, \ldots, u_n)$$

hermitesch $\Leftrightarrow$ symmetrisch für reelle Matrizen

Rayleigh-Quotient

S hermitesch positiv definit $\implies$

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0$$

für kleinsten und größten Eigenwert extremal

Jordan-Form

Ähnlichkeitstranformation auf die Blockdiagonalform

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

mit λ_i den Eigenwerten von A

Dominanter Eigenwert

λ betragsmäßig größter Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \implies$

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \to \infty\,,$$

falls x eine nichttriviale Komponente im Eigenraum von λ hat

Konvergenz von Matrix-Potenzen

$A^n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_k| < 1\ \forall k$

A^n beschränkt $\quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_k| \le 1\ \forall k$ und $|\lambda_k| = 1$ nur für Eigenwerte mit gleicher algebraischer und geometrischer Vielfachheit

Divergenz von A^n in allen anderen Fällen