5.8 Eigenwerte, Normalformen und Singulärwertzerlegung

Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum

Eigenvektor v zum Eigenwert λ einer quadratischen Matrix A

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0$$

Eigenraum: $V_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda E)$

Ähnlichkeitstransformation

Basiswechsel

$$A \to B = Q^{-1}AQ$$

erhält Eigenwerte

$$v \text{ Eigenvektor von } A \quad \Leftrightarrow \quad w = Q^{-1}v \text{ Eigenvektor von } B$$

Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

Eigenwerte λ_k: Nullstellen von p_A

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \mathrm{Spur}\, A, \quad \prod_{k=1}^n \lambda_k = \det A$$

Eigenvektoren v: nicht-triviale Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)v = 0$$

Konstruktion einer Basis für den Eigenraum $V_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda E)$ durch Transformation auf Zeilenstufenform

Algebraische und geometrische Vielfachheit

algebraische Vielfachheit m_λ: Ordnung der Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

geometrische Vielfachheit d_λ: Dimension des Eigenraums $V_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda E_n)$

Beziehungen zwischen m und d

$$d_\lambda \leq m_\lambda, \quad \sum_\lambda m_\lambda = n, \quad d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E)$$

Summe und Produkt von Eigenwerten

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det A$$

mehrfache Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt

Basis aus Eigenvektoren

Basis aus Eigenvektoren v_k mit Eigenwerten λ_k zu $A \rightsquigarrow$ Diagonalisierung

$$V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n)$$