5.7 Lineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

homogen (inhomogen): $b = 0$ ($b \neq 0$)

überbestimmt, falls unlösbar (im Allgemeinen für $m > n$)

unterbestimmt, falls keine eindeutige Lösung (im Allgemeinen für $m < n$)

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = a_1x_1 + \cdots a_nx_n = b \in \mathbb{R}^m$$

mit a_k den Spalten von A

(i) homogenenes System ($b = 0$):
immer lösbar, linearer Lösungsraum $\operatorname{Kern} A$
eindeutige Lösung $x = 0$, falls a_k linear unabhängig

(ii) inhomogenes System ($b \neq 0$):
lösbar genau dann wenn $b \in \operatorname{Bild} A$ (b als Linearkombination von a_k darstellbar)

affiner Lösungsraum

$$x_* + \operatorname{Kern} A$$

mit einer speziellen Lösung x_*

eindeutig, falls $\operatorname{Kern} A = 0$

Cramersche Regel

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x_i \det A = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

mit a_k den Spalten der quadratischen Matrix A

eindeutige Lösung für belibieges b, falls $\det A \neq 0$

$b = e_j$ (Einheitsvektoren) $\rightsquigarrow$ Koeffizienten der Inversen $C = A^{-1}$

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

Rückwärts-Einsetzen

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sukzessive Berechnung der Unbekannten

$$x_\ell = (b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n)\,/r_{\ell,\ell}, \quad \ell = n, \ldots, 1$$

Gauß-Elimination

Transformation auf obere Dreiecksform

nach $\ell - 1$ Schritten

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & a_{\ell,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell,n}x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & a_{\ell+1,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell+1,n}x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

ℓ-ter Eliminationsschritt

- evtl. Vertauschung von Zeilen, so dass $a_{\ell,\ell} \neq 0$
- Subtraktion von Vielfachen der ℓ-ten Zeile:
  für $i > \ell$ und $j \geq \ell$

  $$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

  $\rightsquigarrow$ Nullen unterhalb von $a_{\ell\ell}$

Zeilenstufenform eines Gleichungssystems

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0...0 & p_1 & *...* & & & & & \\ & & 0 & 0...0 & p_2 & *...* & & \\ & & & & 0 & 0...0 & p_3 & *... \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

mit Pivots $p_1, \ldots, p_k \neq 0$, $k = \operatorname{Rang} A$

sukzessive Umformung analog zur Gauß-Elimination

Lösung eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 0\dots0 & p_1 & *\dots* & & & & & \\ & & 0 & 0\dots0 & p_2 & *\dots* & & \\ & & & & 0 & 0\dots0 & p_3 & *\dots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

mit Pivots $p_1, \dots, p_k \neq 0$

lösbar genau dann wenn $c_{k+1} = \dots = c_m = 0$

(i) $k = n \rightsquigarrow$ eindeutige Lösung

(ii) $k < n \rightsquigarrow n - k$ linear unabhängige Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems ($c_i = 0$)

Unbekannte, die den Spalten ohne Pivots entsprechen, frei wählbar