

5.6 Determinanten

Determinante

Schreibweisen

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mit a_k den Spalten von A

definierende Eigenschaften

- Multilinearität:

$$\det(\dots, \alpha a_j + \beta b_j, \dots) = \alpha \det(\dots, a_j, \dots) + \beta \det(\dots, b_j, \dots)$$

- Antisymmetrie:

$$\det(\dots, a_j, \dots, a_k, \dots) = -\det(\dots, a_k, \dots, a_j, \dots)$$

- Normierung:

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}$$

für die Einheitsvektoren e_k

Entwicklung als Summe n -facher Produkte

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

mit $\sigma(i)$ dem Vorzeichen der Permutation (i_1, \dots, i_n)

Determinante als Volumen

Volumen des von a_1, \dots, a_n aufgespannten Spats

$$|\det A| = \text{vol} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\} = \text{vol}(A[0,1]^n)$$

Determinanten spezieller Matrizen

- Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$ für $i < j$ oder $i > j \implies$

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$$

- Blockdiagonalmatrix: Blockstruktur mit $A_{ij} = 0, i \neq j$, und quadratischen Diagonalblöcken $A_{ii} \implies$

$$\det A = \prod_{i=1}^k \det A_{ii}$$

- Orthogonale und unitäre Matrizen:

$$|\det U| = 1$$

Eigenschaften von Determinanten

$\det A$

- invariant bei Addition eines Vielfachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile)
- null bei zwei gleichen Spalten (Zeilen)
- Vorzeichenänderung bei Vertauschung von Spalten (Zeilen)

\rightsquigarrow sukzessive Transformation auf Dreiecksform

Regeln

$$\det A = \det A^t, \quad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}, \quad \det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Entwicklungssatz für Determinanten

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det \tilde{A}_{kj} \quad (\text{Entwicklung nach Zeile } k) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \det \tilde{A}_{i\ell} \quad (\text{Entwicklung nach Spalte } l) \end{aligned}$$

mit \tilde{A}_{ij} der Matrix, die durch Streichen der i -ten Zeile j -ten Spalte entsteht