5.5 Matrizrechnung

Matrix-Multiplikation

$A : m \times n$, $B : n \times \ell \rightsquigarrow C : m \times \ell$

$$C = AB, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad 1 \le i \le m,\, 1 \le k \le \ell$$

Komposition der linearen Abbildungen $u \mapsto v = Bu$, $v \mapsto w = Av$

i.a. nicht kommutativ

Inverse Matrix

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Invertierung von Matrixprodukten: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Transponierte, adjungierte, symmetrische und hermitesche Matrix

transponierte Matrix

$$B = A^{\mathrm{t}} \quad \Leftrightarrow \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

symmetrisch: $A = A^t$

adjungierte Matrix

$$C = A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}} \quad \Leftrightarrow \quad c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$$

selbst-adjungiert oder Hermitesch: $A = A^*$

Regeln

$$\begin{array}{rclcrcl} (AB)^{\mathrm{t}} & = & B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} & \text{und} & (AB)^* & = & B^*A^*\,, \\ (A^{\mathrm{t}})^{-1} & = & (A^{-1})^{\mathrm{t}} & \text{und} & (A^*)^{-1} & = & (A^{-1})^* \end{array}$$

Spur einer Matrix

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Regeln

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA), \quad \mathrm{Spur}(T^{-1}AT) = \mathrm{Spur}(A)$$

Rang einer Matrix

maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen

Matrix-Norm

zugeordnet

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

submultiplikativ, d.h. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

euklische Norm

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \, A^*Av = \lambda v\}$$

Zeilensummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_j \sum_k |a_{jk}|$$

Orthogonale und unitäre Matrix

unitär: Spalten bilden orthonormale Basis

$$A^{-1} = \overline{A}^{\mathrm{t}} = A^*$$

orthogonal: Spezialfall reeller Matrizen, $A^{-1} = A^{\mathrm{t}}$

Invarianz der euklidischen Norm: $|Av| = |v|$

Normale Matrizen

$$A \text{ normal} \quad \Leftrightarrow \quad AA^* = A^*A, \quad A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}}$$

bzw. $AA^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}A$ für reelles A

unitär, hermitesch, orthogonal oder symmetrisch $\implies$ normal

Zyklische Matrizen

generiert durch zyklisches Verschieben der ersten Spalte

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

zyklische Struktur kompatibel mit Matrixmultiplikation

Positiv definite Matrix

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0$$

positive Diagonalelemente und Eigenwerte, positiv definite Inverse

semidefinit, falls $v^*Av \geq 0$