5.4 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung

Abbildung $L : V \to W$ zwischen Vektorräumen

- additiv:
  $L(u+v) = L(u) + L(v)$
- homogen:
  $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

insbesondere: $L(0_V) = 0_W$, $L(-v) = -L(v)$

Komposition linearer Abbildungen

Hintereinanderausführung linearer Abbildungen $S : U \to V$, $T : V \to W$

$\rightsquigarrow$ lineare Abbildung

$$T \circ S : U \to W, \quad (T \circ S)(u) = T(S(u))$$

Matrix

Rechteckschema mit m Zeilen und n Spalten

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

komponentenweise Definition von Operationen

$$C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \qquad B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Matrix einer linearen Abbildung

lineare Abbildung $L : V \longmapsto W$ zwischen Vektorräumen mit Basen $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ und $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ eindeutig bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren

$$L(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m$$

$\rightsquigarrow$ lineare Abbildung der Koordinaten

$$w_F = A v_E \quad \Leftrightarrow \quad w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j, \quad i = 1, \ldots, m$$

Affine Abbildung

affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$f(x) = Ax + v$$

v: Bild des Nullvektors

A: $m \times n$-Matrix mit Spalten $a_{1:m,k} = f(e_k) - v$

Basiswechsel

Transformation der Koordinaten bei einem Basiswechsel $E \to E'$

$$v_{E'} = Av_E, \quad e_k = \sum_j a_{jk} e'_j$$

Bild und Kern

lineare Abbildung $L : V \to W$

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern} L &= \{v \in V :\ L(v) = 0\} \ \subseteq V \\ \operatorname{Bild} L &= \{w \in W :\ \exists v \in V \text{ mit } L(v) = w\} \ \subseteq W \end{aligned}$$

$\dim V < \infty \implies$

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern}(L) + \dim \operatorname{Bild}(L)$$

Inverse Abbildung

$L : V \to W$ injektiv $\quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Kern} L = 0_V$

$\rightsquigarrow$ lineare Umkehrabbildung

$$w \mapsto v, \quad w = L(v)$$