5.3 Skalarprodukt und Norm

Reelles Skalarprodukt

Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V mit folgenden Eigenschaften

- Positivität:
$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ für } v \neq 0$$
- Symmetrie:
$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$
- Linearität:
$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

Komplexes Skalarprodukt

Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ auf einem komplexen Vektoraum V mit folgenden Eigenschaften

- Positivität:
$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ für } v \neq 0$$
- Schiefsymmetrie:
$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$
- Linearität:
$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

Euklidisches Skalarprodukt

$$y^* x = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

assoziierte Norm

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$$

Gleichheit genau dann wenn $u \parallel v$

bei reellem Skalarprodukt Definition eines Winkels $\alpha \in [0, \pi]$ via

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

Norm

Abbildung $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

- Positivität:
$$\|v\| > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$
- Homogenität:
$$\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$
- Dreiecksungleichung:
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Norm, assoziiert mit einem Skalarprodukt

$$|u| = \sqrt{\langle u, v\rangle}$$

Orthogonale Basis

$$\langle u_i, u_j\rangle = 0, \quad i \neq j$$

orthonormal, falls $|u_k| = 1$

eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k\,, \quad c_k = \frac{\langle v, u_k\rangle}{|u_k|^2}$$

Norm: $|v|^2 = |c_1|^2|u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2|u_n|^2$

Orthogonale Projektion

Abbildung auf einen Unterraum U eines Vektorraums V

$$v \mapsto P_U(v) \in U \subset V, \qquad \langle v - P_U(v), u\rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

$u_1, \ldots, u_k$ orthogonale Basis von $U \implies$

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k$$

Verfahren von Gram-Schmidt

induktive Orthogonalisierung einer Basis $b_1, \ldots, b_n$

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k, \quad j = 1, \ldots, n$$

$|\langle u_k, u_k\rangle| = 1$ bei Normierung, $u_j \leftarrow u_j/|u_j|$, nach jedem Schritt