5.2 Vektorräume

Vektorraum

abelsche Gruppe $(V, +)$, auf der eine Skalarmultiplikation $\cdot$ mit Elementen aus einem Körper K mit den folgenden Eigenschaften definiert ist

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v &= \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v \\
\lambda \cdot (v_1 + v_2) &= \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 \\
(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v &= \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) \\
1 \cdot v &= v
\end{aligned}$$

Vektorraum der n-Tupel

$$K^n: \; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}, \quad a_i \in K$$

komponentenweise definierte Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$): n-Tupel reeller (komplexer) Zahlen

Unterraum

Teilmenge U eines K-Vektorraums V, die bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist:

$$\begin{aligned}
u, v \in U &\implies u + v \in U \\
\lambda \in K, u \in U &\implies \lambda \cdot u \in U
\end{aligned}$$

Linearkombination

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

lineare Hülle $\mathrm{span}(U)$: Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus U

Konvexkombination

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m, \quad \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$$

konvexe Hülle $\operatorname{conv}(U)$: Menge aller Konvexkombinationen von Vektoren aus U

Lineare Unabhängigkeit

linear unabhängig:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

linear abhängig:

$$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 : \ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

(nicht-triviale Darstellung des Nullvektors)

Basis

$B = \{b_1, b_2, \ldots\} \subset V$ Basis $\Leftrightarrow$
eindeutige Darstellbarkeit der Vektoren v des Vektorraums V als Linearkombination

$$v = \sum_k \lambda_k b_k$$

$\Leftrightarrow$ b_k linear unabhängig und $\operatorname{span}(b_1, b_2, \ldots) = V$

Dimension: $\dim V = |B|$