5.11 Orthogonale Transformationen und Quadriken

Spiegelung

(orthogonale) Spiegelungsmatrix

$$Q = E - \frac{2}{|d|^2} d d^{\mathrm{t}}$$

mit d einem Normalenvektor der Spiegelungsebene

Drehung

Drehung um den Winkel φ in der $x_i x_j$-Ebene $\rightsquigarrow$ Drehmatrix $Q_{i,j}$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Zeile } i \;\; \rightarrow \\ \\ \text{Zeile } j \;\; \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit $c = \cos\varphi$ und $s = \sin\varphi$

Q orthogonal, $\det Q = 1 \implies$

$$Q = \prod_{i<j} Q_{i,j}$$

Drehung im Raum

$$x \mapsto Qx = \cos\varphi\, x + (1 - \cos\varphi) u u^{\mathrm{t}} x + \sin\varphi\, u \times x$$

mit normierter Drehachsenrichtung u, Drehwinkel φ (orientiert wie eine Rechtsschraube) und $\times$ dem Kreuzprodukt

$$Qu = u, \quad \cos\varphi = (\operatorname{Spur} Q \, - \, 1)/2$$

entsprechende Drehmatrix

$$Q: \quad q_{ik} \quad = \quad \cos\varphi\, \delta_{ik} + (1 - \cos\varphi)\, u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j$$

Drehachse und Drehwinkel

Jede Drehung Q im $\mathbb{R}^3$ besitzt eine Drehachse, d.h. lässt einen Einheitsvektor u invariant, und entspricht einer ebenen Drehung um einen Winkel φ in der zu u orthogonalen Ebene.

Bezüglich eines orthonormalen Rechtssystems u, v, w besitzt Q die Matrixdarstellung

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Insbesondere gilt für den Drehwinkel

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Spur} Q - 1\right) .$$

Quadrik

$$Q : x^{\mathrm{t}} A x + 2 b^{\mathrm{t}} x + c = 0$$

homogene Form: $Q :\ \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$ mit

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^{\mathrm{t}} \\ \hline b & A \end{array}\right), \quad \tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$$

Klassifizierung

- kegelige Quadrik: $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$
- Mittelpunktsquadrik: $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$
- parabolische Quadrik: $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$

Hauptachsentransformation

Drehung und Verschiebung $\rightsquigarrow$ Normalform

$$x^{\mathrm{t}} A x + 2 b^{\mathrm{t}} x + c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma\,, \quad x = Uw + v$$

mit $m = \operatorname{Rang} A$ und $\beta\gamma = 0$

Spalten der Drehmatrix U: Eigenvektoren u_i (Hauptachsen) zu den Eigenwerten λ_i von A

Verschiebungsvektor v: Mittelpunkt der Quadrik

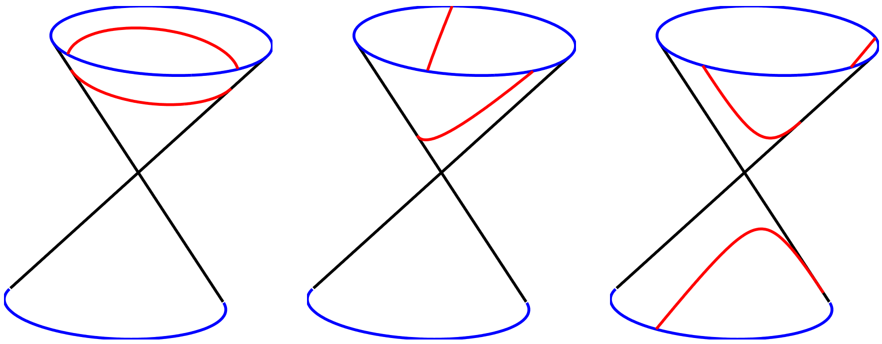
Kegelschnitt

Doppel-Kegel mit Spitze p ($p_3 \neq 0$), Richtung v und Öffnungswinkel α

$$K: \; (x-p)^{\mathrm{t}} v = \pm \cos \frac{\alpha}{2} \, |x-p||v|$$

Schnitt mit der Ebene $E: \; x_3 = 0 \rightsquigarrow$ ebene Quadrik

Typ bestimmt durch Winkel β der Achse mit der Ebene E



Ellipse: $\beta > \alpha/2$ Parabel: $\beta = \alpha/2$ Hyperbel: $\beta < \alpha/2$

Euklidische Normalformen der zweidimensionalen Quadriken

- Kegelige Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punkt
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade

- Mittelpunktsquadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbel
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Ellipse
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	paralleles Geradenpaar

- Parabolische Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	Parabel

Euklidische Normalformen der dreidimensionalen Quadriken

- Kegelige Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	Punkt
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	(Doppel-)Kegel
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Gerade
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidende Ebenen
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelebene

- Mittelpunktsquadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	Ellipsoid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	elliptischer Zylinder
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	parallele Ebenen

- Parabolische Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	elliptisches Paraboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	parabolischer Zylinder